УДК 37.02

М. А. Сивов

Вариативность моделирования и решения вероятностных задач

В статье предлагаются различные вариации одной вероятностной задачи. Рассматриваемые примеры позволяют продемонстрировать возможности моделирования заданий в курсе математики для гуманитарных специальностей. В статье также показаны возможности использования графов в теории вероятностей.

Ключевые слова: теория вероятностей, графы, вероятностные задачи, моделирование задач, вероятность, вариативность вероятностных задач.

M. A. Sivov

Variability of Modeling and Solving Probability Tasks

In the article different variations of one probabilistic problem are offered. The considered examples allow to perform possibility of modeling tasks in the course of Mathematics for humanitarian specialities. In the article possibilities of use of graphs in the Probability theory also are shown.

Key words: the Probability theory, graphs, probabilistic problems, modeling the tasks, probability, variability of probabilistic problems.

Введение понятия вероятности события – одна из фундаментальных задач в науке. Поэтому при преподавании математики важно показать практическую значимость данного понятия, продемонстрировать взаимосвязь различных теорем и формул на наглядных примерах. В предложенных задачах показана взаимосвязь таких понятий, как формула полной вероятности, теорема Бернулли и формула Байеса. Кроме того, рассматриваемые примеры иллюстрируют основное правило комбинаторики, определение вероятности события, правила сложения и умножения вероятностей.

Рассмотрим следующий пример. Пусть игрок бросает 3 монеты одинакового достоинства 2 раза. В случае совпадения комбинаций игрок получает приз в размере 100 рублей, а стоимость участия в игре составляет 40 рублей. Определим, стоит ли играть в такую игру.

Если подбрасываются монеты одинакового достоинства, то совпадение комбинаций после подбрасываний можно определить, как совпадение количества «гербов» и «решек».

Заметим, что если одновременно подбрасывается n монет, то возможных исходов будет 2^n.

Для поставленной задачи количество выпавших после одного подбрасывания «гербов» может равняться: 0, 1, 2 или 3. Определим вероятность для каждого случая.

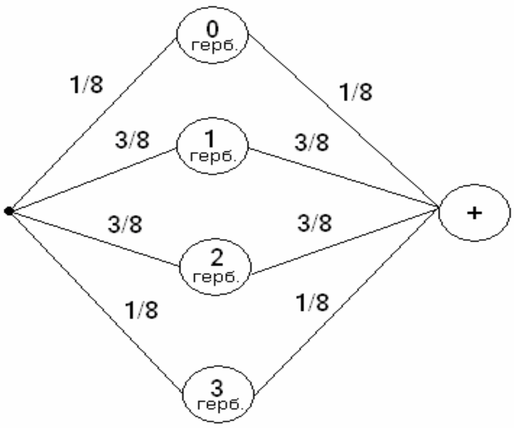
В общем случае, m «гербов» из n монет можно выбрать C_n^m способами, где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Таким образом, 0 «гербов» из 3 монет можно выбрать $C_3^0 = 1$ способом; 1 «герб» – $C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ способами; 2 «герба» – $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ способами; 3 «герба» – $C_3^3 = 1$ способом. Тогда вероятности для выпадения 0 и 3 «гербов» составят 1/8, а для 1 или 2 «гербов» 3/8.

Заметим, что так как подбрасывались одни и те же монеты, то вероятность выпадения некоторого числа «гербов» при первом подбрасывании совпадает с вероятностью выпадения такого же количества «гербов» при всяком последующем подбрасывании.

Зная вероятности для каждого из возможных случаев, построим вероятностный граф для определения вероятности совпадения комбинаций монет при 2-х подбрасываниях.

Заметим, что вероятностный граф представляет собой геометрическую иллюстрацию формулы полной вероятности [1, с. 48–49], где в вершинах графа прописываются возможные исходы события, а над ребрами ставятся соответствующие вероятности данных исходов.



Определим вероятность совпадения комбинаций монет после 2-х подбрасываний как вес всего графа с гипотезами:

$$p(+)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{16}.$$

Зная искомую вероятность, легко определить математическое ожидание выигрыша в игре:

$$M=(100-40)\cdot\frac{5}{16}+(0-40)\cdot\frac{11}{16}=-9{,}75<0\,.$$

Если математическое ожидание оказалось меньше нуля, то играть в предложенную игру не выгодно.

На данной задаче удобно продемонстрировать и применение формулы Байеса.

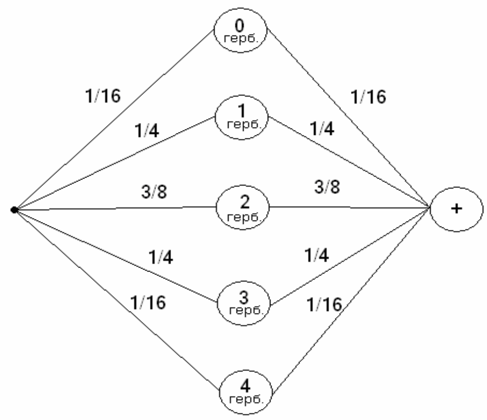
Предположим, что игрок победил в игре, то есть монеты оба раза выпали одинаковым образом. Какова вероятность того, что выпадало по 2 «герба»?

По формуле Байеса данная вероятность определяется следующим образом: $\dfrac{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{5}{16}}=\dfrac{9}{20}$. Аналогично можно определить вероятность того, что в случае победы игрока выпало, например, 3 «герба» (или ни одного «герба»): $\dfrac{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}}=\dfrac{1}{20}$.

Увеличим количество подбрасываемых монет до 4-х. Пусть подбрасываемые монеты попрежнему будут одного достоинства.

Если одну монету можно положить 2-мя способами («герб» и «решка»), то 4 монеты можно разложить 2^4=16 способами. Вероятности выпадения 0, 1, 2, 3 и 4 «гербов» определим тем же способом, как в предыдущем примере.

Построим вероятностный граф с гипотезами:



Вероятность совпадения комбинаций после 2-хподбрасываний 4-х монет находим, как вес всего графа:

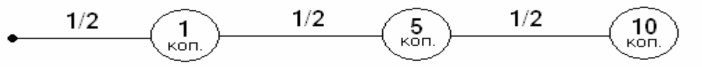
$$p(+)=\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{35}{128}.$$

Аналогично предыдущему примеру по формуле Байеса можно определить вероятность выпадения того или иного количества «гербов» в случае совпадения комбинаций. Например, вероятность того, что выпал один «герб» равна: $\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{35}{128}}=\dfrac{8}{35}$.

Рассмотрим ситуацию, когда подбрасываются монеты разного достоинства. Например, подбросили 2 раза по 3 разные монеты: 1 копейка, 5 копеек и 10 копеек. Определим вероятность того, что оба раза выпадет одинаковая комбинация монет.

В таком примере ситуация аналогична опыту, в котором все монеты подбрасываются по отдельности, и нам необходимо определить вероятность того, что монеты одного достоинства при первой серии подбрасывания упадут также, как монеты того же достоинства во всех последующих сериях подбрасывания. Например, если одна копейка выпала «гербом» («решкой») при первом подбрасывании, то вероятность того, что 1 копейка выпадет и во 2-ой раз также, равна ½.

Проведя аналогичные рассуждения для монеты каждого достоинства, построим вероятностный граф проведенного испытания.



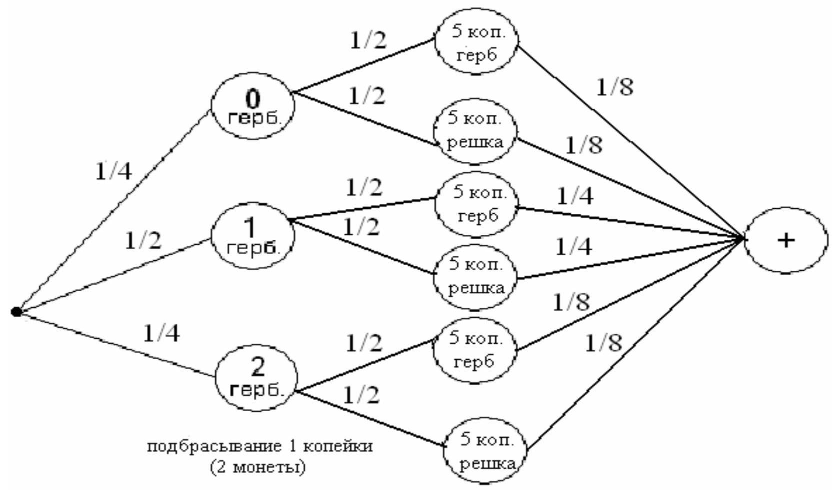
Таким образом, вероятность того, что монеты одного достоинства при первом подбрасывании выпадут так же, как монеты аналогичного достоинства при 2-м подбрасывании, равна:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Определим, какой должна быть стоимость участия в данной игре, если в случае совпадения комбинаций монет после 2-х подбрасываний игроку полагается приз в размере 100 рублей. В этом случае математическое ожидание выигрыша составит: 100·1/8=12,5 рублей. Следовательно, чтобы игра была «безобидной», стоимость участия в игре должна равняться 12,5 рублям, чтобы игра была выгодна игроку, стоимость участия должна быть менее 12,5 рублей, и чтобы игра была выгодна организатору, стоимость участия должна быть выше 12,5 рублей.

Рассмотрим ситуацию, когда 2 раза подбрасываются 3 монеты, причем 2 из них одного достоинства (например, по 1 копейке) и 3-я монета другого достоинства (например, 5 копеек). Определим вероятность того, что комбинации подброшенных монет оба раза будут одинаковыми.

Построим вероятностный граф данного опыта, где отразим обе описанные ситуации. Учтем, что вероятность выпадения нуля «гербов» равна вероятности выпадения 2-х «гербов» и равна ¼, а вероятность выпадения одного «герба» равна ½. Кроме того, вероятность того, что монета достоинством в 5 копеек при 2-м подбрасывании упадет так же, как и при первом, равна ½.

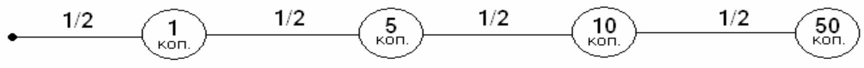


Искомую вероятность определим, как вес всего графа:

$$p(+) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{16}$$

Предположим, что подбрасываются по 4 монеты разного достоинства (например, 1, 5, 10 и 50 копеек).

В этом случае рассуждения и вероятностный граф будут аналогичными уже рассмотренному примеру с 3-мя разными монетами:



$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

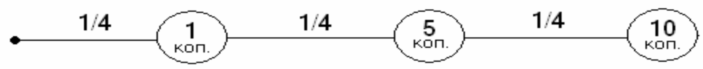
Количество монет при каждом подбрасывании можно увеличить до n. В этом случае вероятность совпадения результатов 2-х подбрасываний n монет разного достоинства составит: $p = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

Увеличим количество подбрасываний до 3-х. Пусть каждый раз подбрасываются 3 монеты разного достоинства (1, 5 и 10 копеек). В этом случае вероятность того, что монета некоторого достоинства (например, 1 копейка) во 2-й раз выпадет так же, как и в первый, равна ½. Аналогично вероятность совпадения результата подбрасывания монеты в первый раз с результатом подбрасывания монеты того же достоинства в третий раз равна ½. Тогда вероятность того, что монета одного достоинства при первом подбрасывании упадет так же, как монета аналогичного достоинства при 2-м и 3-м подбрасывании, равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Найдем вероятность того, что после 3-х подбрасываний 3-х монет разного достоинства, все 3 раза выпадут одинаковые комбинации монет.

Данная задача аналогична предыдущему примеру. Отличительной особенностью рассматриваемого примера является другое значение вероятности совпадения выпавшей монеты одного достоинства для всех подбрасываний.

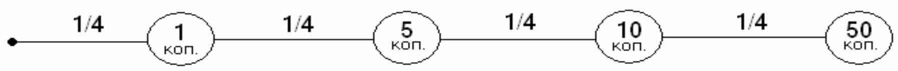
Построим вероятностный граф.



Вероятность совпадения результатов 3-х подбрасываний 3-х разных монет равна:

$$p=\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{1}{64}.$$

Если подбрасывать 3 раза по 4 монеты разного достоинства, то картина испытания будет следующей:



Вероятность совпадения результатов 3-х подбрасываний по 4 разные монеты равна:

$$p=\left(\frac{1}{4}\right)^{4}=\frac{1}{256}.$$

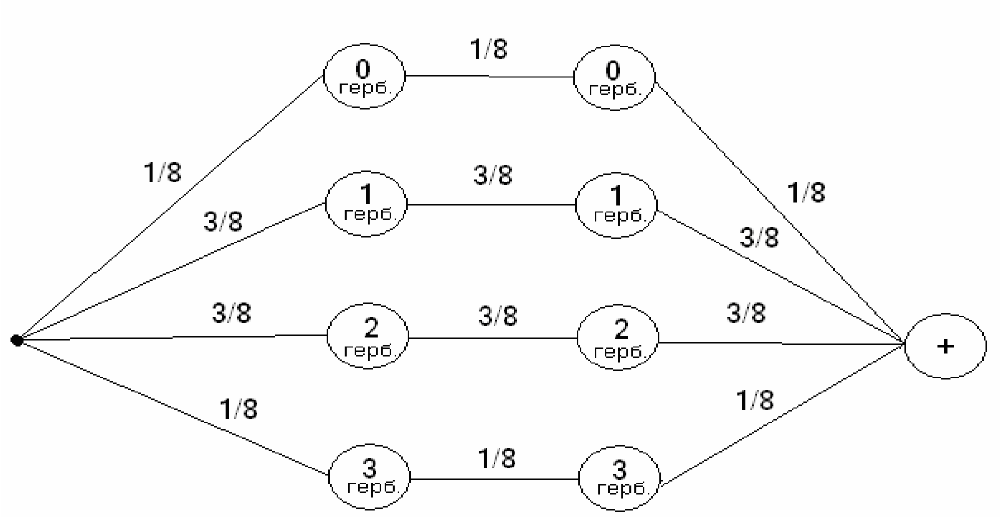
Обобщим рассмотренный пример для k подбрасываний по n разных монет.

Вероятность того, что после k подбрасываний монета одного достоинства упадет одинаково (например, везде «гербом»), равна $p_0=(1/2)^{k-1}$. Поэтому вероятность того, что для монеты каждого достоинства положение после всех подбрасываний будет одинаково, равна:

$$p=p_0^n=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right)^{n}=\frac{1}{2^{n(k-1)}}.$$

Рассмотрим случай для 3-х подбрасываний с 3-мя монетами одного достоинства. Сравнение результатов подбрасываний производим по количеству выпавших «гербов» (или «решек») после каждого подбрасывания. Определим вероятность того, что количество «гербов» после первого подбрасывания совпадет с количеством «гербов» после 2-го подбрасывания и совпадет с количеством «гербов» после 3-го подбрасывания.

Поскольку вероятности выпадения 0, 1, 2 и 3 «гербов» определены по формуле Бернулли, построим вероятностный граф.



Тогда вероятность совпадения результатов 3-х подбрасываний с 3-мя одинаковыми монетами равна:

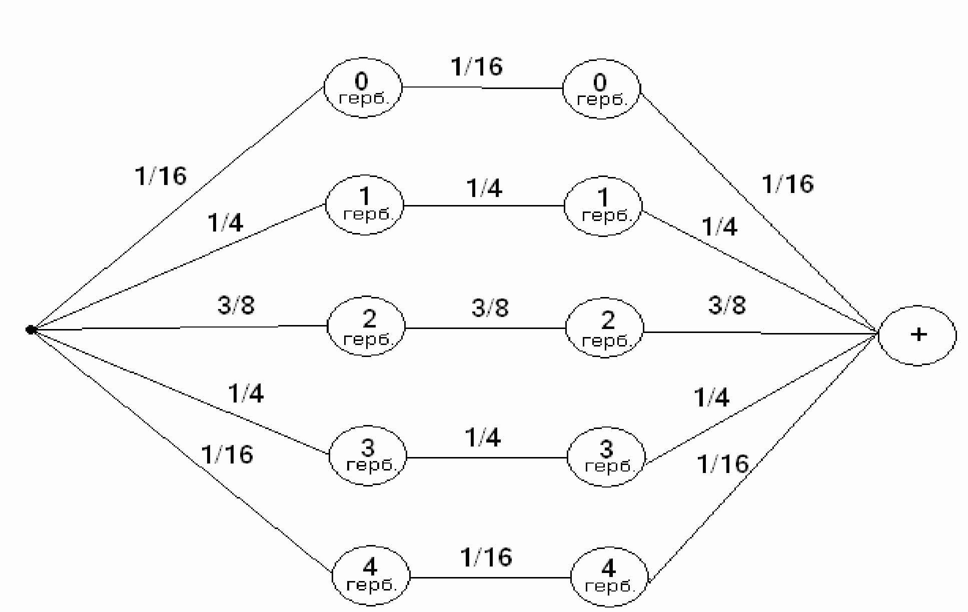
$$p(+) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 \cdot 2 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot 2 = \frac{7}{64}.$$

С помощью формулы Байеса в данном примере можно определить вероятность выпадения того или иного количества «гербов» (или «решек») в случае, когда после 3-х подбрасываний все 3 раза монеты выпали одинаковым образом. Например, определим вероятность того, что при совпадении результатов подбрасываний каждый раз выпадало по 2 «герба»: $\dfrac{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{7}{64}} = \dfrac{27}{56}$.

Заметим, что если количество подбрасываний с 3-мя одинаковыми монетами увеличить до k, то вероятность совпадения результатов подбрасывания k раз равна:

$$p = \left(\frac{1}{8}\right)^k \cdot 2 + \left(\frac{3}{8}\right)^k \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1 + 3^k}{8^k}.$$

Рассмотрим пример, когда осуществляется 3 подбрасывания по 4 одинаковые монеты. Данный пример аналогичен предыдущему, а вероятности выпадения того или иного количества «гербов» (или «решек») при подбрасывании монет один раз определены ранее. Поэтому построим вероятностный граф испытания.



Искомая вероятность определяется как вес всего графа:

$$p(+) = \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 2 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \approx 0{,}084.$$

Если увеличить количество подбрасываний до k, то вероятность совпадения результатов k подбрасываний с 4-мя одинаковыми монетами равна:

$$p = \left(\frac{1}{16}\right)^k \cdot 2 + \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot 2 + \left(\frac{3}{8}\right)^k = \frac{2 + 2^{2k+1} + 6^k}{2^{4k}}.$$

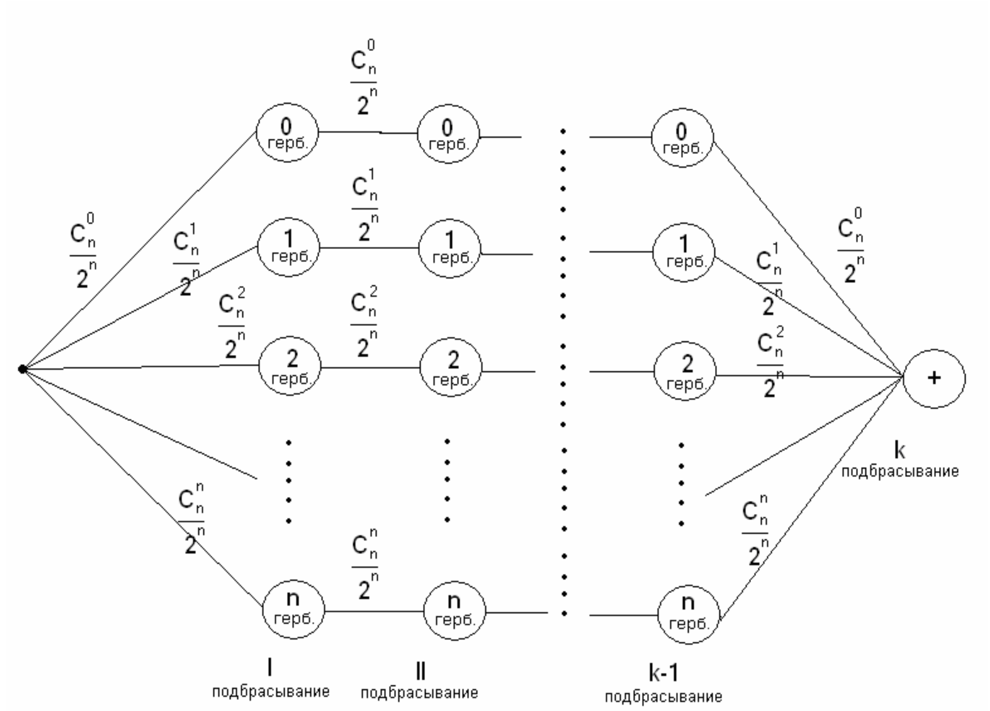
Рассмотрим наиболее общий случай, когда подбрасывают k раз по n одинаковых монет. Определим вероятность того, что все k раз монеты упадут одинаково.

Сравнение результатов подбрасывания будем производить по количеству выпавших «гербов».

Если подбрасывается n монет, то разложить их можно 2^n способами. При этом i «гербов» можно выбрать из n монет C_n^i способами.

Тогда вероятность выпадения i «гербов» при одном подбрасывании n монет равна: $p_i = \dfrac{C_n^i}{2^n}$.

Построим вероятностный граф испытания для k подбрасываний по n одинаковых монет:



Тогда общая формула для нахождения вероятности совпадения результатов k подбрасываний по n одинаковых монет равна:

$$p = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{C_n^i}{2^n} \right)^k = \frac{\sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i \right)^k}{2^{kn}}.$$

Полученную формулу можно представить в виде 2-х формул для следующих случаев:

а) n – нечетное:

$$p = \frac{1}{2^{kn}} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \left(C_n^i \right)^k \cdot 2 = \frac{\sum_{i=0}^{(n-1)/2} \left(C_n^i \right)^k}{2^{kn-1}}.$$

б) n – четное: $p = \frac{1}{2^{kn}} \left(2 \cdot \sum_{i=0}^{n/2-1} \left(C_n^i \right)^k + C_n^{n/2} \right).$

Подобное преобразование уменьшает количество слагаемых, что упрощает и ускоряет вычисления.

Следует заметить, что условия задачи можно изменять, варьируя количество подбрасываний, количество монет, а также устанавливая стоимость участия в игре и величину приза.

Для преподавателя математики важно уметь составлять подобные комплексы задач, связывающие воедино ряд понятий теории вероятностей, демонстрирующих их практическое применение на понятных наглядных примерах.

Библиографический список:

1. Афанасьев, В. В. Теория вероятностей [Текст] : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В. В. Афанасьев. – М. : Владос, 2007. – 350 с.

2. Афанасьев, В. В., Суворова, М. А. Школьникам о вероятности в играх. Введение в теорию вероятностей для учащихся 8–11 классов [Текст] / В. В. Афанасьев, М. А. Суворова. – М. : Академия развития, 2006. – 192 с.