

Е. А. Зубова, Е. И. Смирнов

### Наглядное моделирование в обучении математике будущих инженеров

В статье рассматривается инновационная технология наглядного моделирования в математическом образовании будущих инженеров. Выявлены сущность, факторы, педагогические условия, характеристики и компонентный состав наглядного моделирования в обучении математике. Впервые определена универсальность атрибутов наглядного моделирования как педагогической категории и инженерно-психологических характеристик деятельности оператора АСУ.

**Ключевые слова:** наглядное моделирование, математическое образование будущего инженера, деятельность оператора АСУ, инженерная психология, фундирующие модулы.

E. A. Zubova, E. I. Smirnov

### Visual Modeling in Mathematics Training of the Future Engineers

In the article the innovative technology of visual modeling in mathematical education of the future engineers is considered. The essence, factors, pedagogical conditions, characteristics and a component structure of the visual modeling in training to Mathematics are revealed. For the first time universality of attributes of visual modeling as a pedagogical category and engineering-psychological characteristics of the activity of the automatic control system operator is defined.

**Key words:** visual modeling, mathematical education of the future engineer, the activity of the automatic control system operator, engineering psychology, funding moduses.

Восприятие как психический процесс представляет собой систему перцептивных и опознавательных действий, имеющих сложную операциональную структуру. Эти процессы зависят от способа кодирования информации, устойчивости хранения и оперативного извлечения информации (ассимиляция и регулирование, законы гештальта, миллеровские числа и т. п.). Особенность обучения математике (особенно, в междисциплинарном аспекте, что важно при подготовке будущего инженера) заключается в том, что дидактическая проблема понимания объективно усложняется психологической проблемой понимания. Это является следствием комплексного характера вовлечения в познавательный процесс серии интегральных процессов – перцептивных (обнаружение, различение, идентификация, опознание и т. п.), когнитивных (абстрагирование, обобщение, моделирование, конкретизация и т. п.) и рефлексивных (целеполагание, мониторинг, оценка, прогноз и т. п.). Преодоление формализма в обучении математике будущего инженера возможно, если будет решена одна из основных проблем: *как достигнуть эффекта достижения сущности математических объектов (процессов, идей) в ходе непосредственного их восприятия* (или, по крайней мере, основополагающих конструкторов математических знаний, позволяющих обучаемому осмысленно двигаться

далее в многоступенчатой структуре математических абстракций, составляющих содержание обучения). Разнообразные таксономии учебных целей и стратегии познания включают в свой состав такие основополагающие психические процессы, как понимание и рефлексия (Б. Блум [1], Де Блок [2], Дж. Гилфорд [3] и др.). Например, Б. Блум определяет следующую цепочку таксономий учебных целей в когнитивной области: знание, понимание, применение, анализ, синтез и оценка, причем первые два этапа можно отнести к реализации психических процессов понимания, последние – к реализации рефлексивных процессов. Даже математически одаренная личность испытывает значительные трудности восприятия в учебной деятельности все более объективно усложняющихся математических абстракций как по форме, так и по содержанию. Следует иметь в виду, что математические знания обладают высокой степенью интегративности и преемственности, особенно, в рамках сложившихся традиционно учебных предметов: математического анализа, алгебры, геометрии и др. С другой стороны, процесс обучения математике дискретен и каждая порция нового учебного материала должна завершаться пониманием сущности, осваиваемых учебных элементов – математических объектов, действий, процессов, а также осмыслением прошлого опыта на основе развития мен-

тальных структур: метакогнитивных навыков, репертуара когнитивных стратегий и способов их применения. Поэтому *отбор адекватного содержания, подлежащего изучению в школьной или вузовской математике, создание педагогических условий и технологий адекватного восприятия обучаемыми сущности математических объектов* (явлений и процессов), завершающихся пониманием особенно важны в период непосредственного их восприятия, в период первой стадии познавательного процесса.

Тем самым необходимо проектирование в образовательном процессе наглядных, «хорошо усваиваемых знаниевых моделей» как в симультанном, так и в сукцессивном аспектах. Естественно, что при этом должны быть спроектированы комплексы целей, принципов, методов, форм, критериев и технологий отбора содержания обучения математике, адекватного закономерностям восприятия знаково-символических моделей и активизации ментального опыта обучаемых равно как и процессуальных аспектов конструирования учебных элементов на основе дифференциальных, интегративных и регулятивных составляющих. Это означает, в частности, активизацию метакогнитивных процессов на стадии непосредственного восприятия и моделирования и особенно рефлексии как психического механизма и процессуального аспекта функционирования метасистемного уровня в регулирующих взаимодействиях познавательных структур интеграции математических знаний в единую целостность. Наглядность в ее научном понимании всегда социальна. Когда исследователь находит методом моделирования замысловатый путь к истине, сущность объекта или явления, конкретно-деятельностная формализация проявления сущности, может оставаться на определенное время «вещью в себе» для других энтузиастов. Философские медали, которые вручаются выдающимся математикам один раз в четыре года, не могут быть вручены до тех пор, пока математическое сообщество не проведет широкую экспертизу полученного результата (в течение двух лет), и тем самым сделают таковой (в позитивном случае) наглядным, по крайней мере, для экспертов. Пройдут иногда многие годы, десятилетия, и даже, столетия, пока феномен не станет на основе реализации наглядного моделирования доступным примером и эффективным средством для образовательных целей. Так, до начала XIX в., основы дифференциального и интегрального исчисления, созданные трудами И. Ньютона и Г. Лейбница в конце XVII в., оставались эффективным инструментом познания естественно-

научных закономерностей развития природы. В то же время это был предмет для критического анализа как со стороны философской мысли (Дж. Беркли, Д. Юм, К. Маркс и др.), так и со стороны образовательных возможностей, которые оставались уделом избранных. Дело здесь заключалось в исследовании форм и методов объяснения (а значит, понимания сущности) сопутствующих математических процедур. Ясно, что широкие образовательные результаты не могли быть получены до тех пор, пока усилиями плеяды французских математиков, и, прежде всего, О. Коши, не был создан  $\epsilon$ - $\delta$  язык для обоснования предельных процессов. Такое наглядное моделирование создало возможность, в том числе встать на новый, социально-значимый, уровень понимания и объяснения сущности основ дифференциального и интегрального исчисления.

*Технология наглядного моделирования* [4] позволяет стимулировать различные уровни и длительность организации психических процессов, в том числе рефлексивные и мотивационные процессы. Объектом моделирования является модель. В исследовании Н. Г. Салминой [5] развоятся понятия схемы и модели в учебной деятельности. Если модель не предполагает исследовательской функции, а применяется для иллюстрации каких-то положений или выступает как средство усвоения готового материала, то это схема, а вид знаково-символической деятельности – схематизация. Представление знаний связано со знаково-символической деятельностью и характеризуется структурированностью, связностью и активностью представления. Виды знаково-символической деятельности порождают тип моделей представления знаний, принятые в инженерии знаний и решений проблем искусственного интеллекта: логические, реляционные, семантические сети, продукционные, фреймовые. Таким образом, в содержательной основе наглядного моделирования в обучении лежит типология моделей знаково-символических средств, реально используемых в математике (см. рис. 1).



Рис. 1. Типология моделей в инженерии знания

*Логические модели* представляют математические знания посредством исчисления предикатов и адекватных «иерархических деревьев». Достоинством знаково-символических средств, использующих буквенно-цифровую символику, являются фиксированность алфавита и существование мощных процедур логического вывода. Дерево – это плоский, связный, ациклический граф. Каждый граф, не содержащий циклов, называется лесом. Таким образом, компонентами леса являются деревья. В вершинах графа обычно располагаются учебные элементы (понятия, теоремы, алгоритмы, математические методы, спирали фундирования и т. п.), ребра обозначают отношение между учебными элементами.

Таким образом, можно построить логическую структуру понятий или теорем учебного предмета. Однако здесь прямые аналогии инженерии знаний и представления знаний в мышлении человека заканчиваются. Глубина и ширина поиска, процедуры поиска оптимального пути вступают в противоречие с физиологическими и психологическими возможностями восприятия (миллеровские числа, законы гештальта, психомоторика и т. п.). Поэтому, например, в логической структуре понятий должно быть  $7 \pm 2$  базовых понятий (вершин) и 3–4 уровня глубины дерева, с теми же миллеровскими числами в каждой промежуточной вершине. Если это невыполнимо в рамках этого учебного материала, то необходима его глобальная структуризация.

*Реляционные модели* в основном представляются разнообразными таблицами. В математике таблицы являются не только средством представления знаний, но и учебными элементами, например, матрицы в алгебре, таблицы производных и интегралов в математическом анализе, электронные таблицы в информатике и т. д. Таблицы легко воспринимаются, структура их доступна, данные группируются компактно.

*Семантическая модель* представляет собой ориентированный граф, в котором вершины соответствуют определенным объектам или понятиям, а дуги отражают отношения между вершинами. Семантическая модель допускает циклы, разнотипность отношений между вершинами, разнообразие видов информации о математических объектах в вершинах: это могут быть блок-схема изучения темы или доказательства теоремы, структурная модель полноты изучения понятия, спирали фундирования и мотивации базового школьного знания и т. д. Требования к построению семантических сетей коррелируют с основными закономерностями восприятия знаково-символических систем.

*Продукционная модель* фиксирует процедуру математических действий при решении определенных задач. Например, схема исследования функции  $f$  действительного переменного выглядит следующим образом:

1. Найти область определения  $D(f)$  и область значений  $R(f)$  функции, точки пересечения с

координатными осями, особые точки и пределы функции  $f$  на бесконечности и в особых точках.

2. Найти асимптоты  $f$  и построить эскиз графика.

3. Найти первую производную функции  $f$ , стационарные и критические точки. Найти промежутки монотонности  $f$ , экстремальные точки и значения  $f$  в них.

4. Найти вторую производную функции  $f'$ , точки перегиба функции  $f$ . Найти промежутки выпуклости функции вверх и вниз.

5. Построить график функции.

Таким образом, такая процедура состоит из 5 правил (продукций).

По мере того, как математические и дидактические объекты усложняются, представления знаний в виде сетей уступают место *фреймовым моделям*. Основатель теории фреймов М. Минский дает следующее определение: «Фрейм (рамка) – это единица представления знаний, запомненная в прошлом, детали которой при необходимости могут быть изменены согласно текущей ситуации». В тех случаях, когда многое можно сказать о содержимом вершины сети, целесообразен переход к фреймовому представлению, содержащему ячейки (слоты) и имена ячеек. Фрейм может иметь многоуровневую структуру. Наличие имен фреймов и имен слотов обеспечивает возможность внутренней интерпретируемости знаний, хранимых во фреймах, а также активизации фрейма за счет процедурных слотов. Таким образом, фреймовые модели удовлетворяют всем четырем основным требованиям к знаниям (внутренняя интерпретируемость, структурированность, связность и активность).

Понятие «математическое моделирование» в последние два–три десятилетия является едва ли не самым распространенным в научной литературе, по крайней мере, в естественно-научной и технической. Сегодня трудно представить себе проектную или конструкторскую организацию, не использующую в своей практике в той или иной мере математические модели. Все более распространенным и эффективным становится применение математического моделирования в научных исследованиях. Интенсивно разрабатываются математические модели в экономике, управлении, истории, биологии и многих других областях знаний. Под *моделью* (от лат. *Modulus* – мера, образец, норма) понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для этого исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется *моделированием*.

Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель адекватна (от лат. *adaequatus* – приравненный) объекту. При этом адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Учитывая заложенную при создании неполноту модели, можно утверждать, что идеально адекватная модель принципиально невозможна. В качестве одной из характеристик модели может выступать простота (или сложность) модели. Очевидно, что из двух моделей, позволяющих достичь желаемой цели и получить требуемый результат с заданной точностью, предпочтение должно быть отдано более простой. При этом адекватность и простота модели не всегда являются противоречивыми требованиями.

В качестве еще одного свойства модели можно рассматривать потенциальность модели (от лат. *otential* – мощь, сила), или предсказательность с позиций возможности получения новых знаний об исследуемых объектах. Такое свойство модели подчеркивается в определении Н. Н. Моисеева [6]: «Под моделью мы будем понимать упрощенное, если угодно, упакованное знание, несущее вполне определенную, ограниченную информацию о предмете (явлении), отражающее те или иные его свойства. Модель можно рассматривать как специальную для кодирования информации. В отличие от обычного кодирования, когда известна вся исходная информация, и мы лишь переводим ее на другой язык, модель, какой бы язык она не использовала, кодирует и ту информацию, которую люди еще не знали. Можно сказать, что модель содержит в себе потенциальное знание, которое человек, исследуя ее, может приобрести, сделать наглядным и использовать в своих практических жизненных нуждах». Именно свойство потенциальности позволяет модели выступать в качестве самостоятельного объекта исследования. Хорошо построенная модель, как правило, доступнее, информативнее и удобнее для исследования, нежели реальный объект.

Поэтому актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые стороны предметов, явлений и процессов, в том числе посредством адекватного моделирования математического знания. Именно формирование этих узловых, опорных качеств объекта восприятия (перцептивная модель) и представляет собой суть процесса наглядного моделирования. Такой подход а priori предполагает моделирование объекта восприятия с опорой на нейро-физиологические механизмы памя-

ти, закономерности восприятия, ментальные возможности и аффективные состояния личности. При этом особую значимость приобретают модели, фиксирующие процедуру математических действий в процессе исследовательской активности.

Таким образом, наглядность – не только особое свойство психических процессов, но и свойство математического объекта в рамках учебного исследования. Таковым он становится, когда у статистически достоверной выборки обучаемых возникают наглядные перцептивные образы (а значит, и у генеральной совокупности обучаемых). Это, возможно, снимает рассуждения такого свойства: «Поэтому можно говорить (и обычно так всегда и делают), что тот или иной предмет, явление, событие наглядны, имея в виду, что для нас наглядны образы этих объектов» [7]. Наглядность математического объекта (или перцептивного образа) определяется, как уже отмечалось, факторами восприятия, представления, мнемическими процессами в их единстве на основе диагностируемого целеполагания. Следующие критерии определяют существо наглядности математического объекта [8]:

– *диагностируемое целеполагание* целостности и дифференциации структуры и этапов построения модели математического объекта (моделирование, кодирование схематизация, замещение);

– *понимание* обучаемым сущности математического объекта (адекватность восприятия) на основе процессов моделирования;

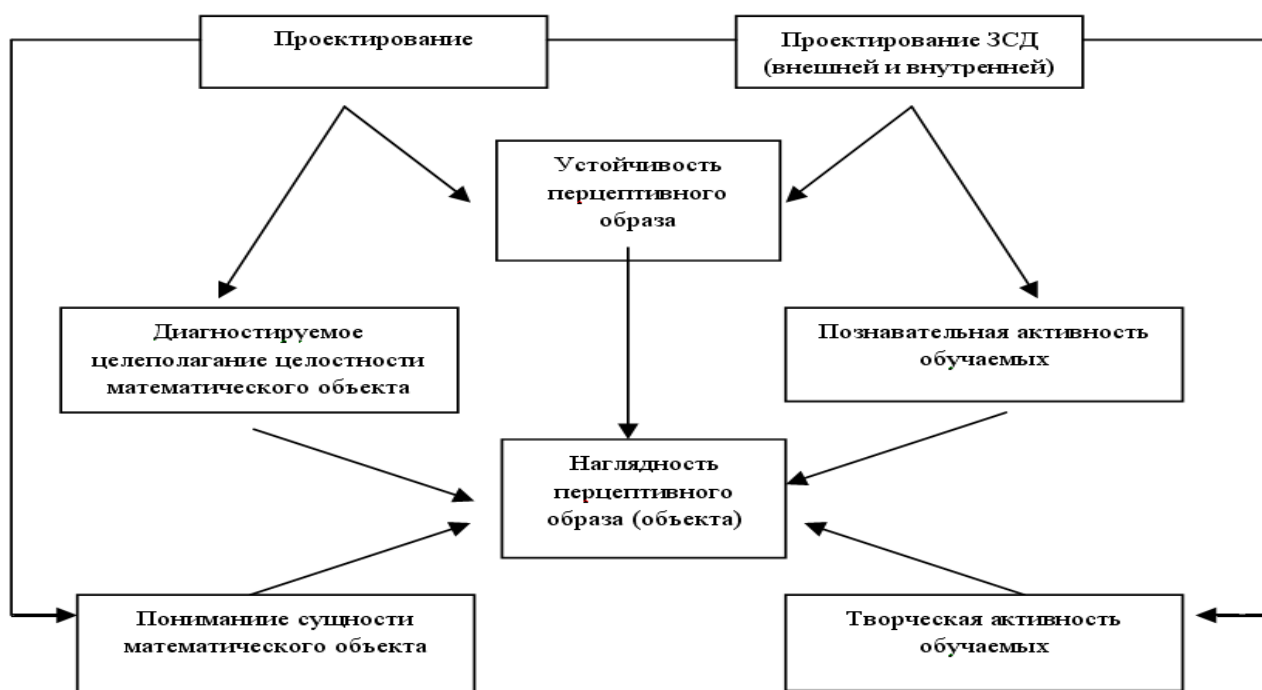
– *устойчивость перцептивного образа и представления* при непосредственном восприятии математического объекта;

– *познавательная и творческая активность* обучаемого на основе комфортности и успешности обучения.

Первый и третий критерии обуславливаются проектированием ориентировочной основы учебной деятельности (ООУД) со знаково-символическими средствами учебного процесса, второй и четвертый – знаково-символической деятельностью как обучаемого, так и обучающего (как внешнего, так и внутреннего плана). Более наглядно это представляется на следующей схеме [8].

Схема 1

Структура критериев наглядности перцептивного образа



Примечания: ООУД – ориентировочная основа учебной деятельности; ЗСД – знаково-символические средства; ЗСД – знаково-символическая деятельность.

Системная реализация в процессе исследовательского обучения математике всех видов наглядного моделирования выступает фактором формирования целостных образов математиче-

ских объектов, неотъемлемым этапом имитации научного познания в обучении школьников, а значит, и значительно способствует усвоению

математических знаний и развитию когнитивных способностей и математического мышления.

**Наглядное моделирование** – это формирование адекватного категории диагностично поставленной цели, устойчивого результата внутренних действий обучаемого в процессе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий объекта при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельными знаниями или упорядоченными наборами знаний.

Таким образом, наглядное моделирование в обучении есть процесс, включающий в себя как проектирование и построение адекватной модели (схемы, кода, заместителя), отражающей существо объекта восприятия, так и формирование адекватного результата внутренних действий обучаемых в процессе учебной деятельности. Предпочтение отдается «наглядной модели» в смысле опоры на устойчивые ассоциации, простые геометрические формы, психологические законы восприятия и нейрофизиологические механизмы памяти. Наглядная модель должна отражать суть понятия, формы или метода исследования. Выявление сущности каждого компонента наглядного моделирования в обучении математике предполагает поиск, познание и раскрытие закономерностей эффективного ее функционирования, создания условий для комфортной совместной деятельности преподавателя и ученика, получение диагностируемого адекватного результата внутренних действий обучаемого. Использование «мягких математических моделей» по В. И. Арнольду [9] при создании ориентировочной и информационной основы учебной деятельности создают условия для оптимального управления познавательной деятельностью обучаемых. Важным обстоятельством является то, что наглядное моделирование осуществляется по III типу ориентировки П. Я. Гальперина, способствует формированию теоретического (математического) мышления и целостному подходу к выявлению сущности учебных элементов. Определение и наглядное моделирование ООУД в процессе исследовательского поведения школьников создает основы для формирования *положительной мотивации* достижения результатов, самореализации личности и мотивации интеллектуального напряжения. В обосновании такого подхода лежит методологический тезис А. Н. Леонтьева [10]: «...актуально осознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной деятельности ученика то есть занимает структурное место непосредственной цели внутреннего или внешнего действия в

системе той или иной деятельности». Более того, главным в *творческом процессе* являются не только внешние его проявления, характеристики, факторы и критерии (что собственно и есть основные ориентиры для формирования), а внутренние атрибуты творческой активности – бессознательность, спонтанность, неконтролируемость волей и разумом, а также изменчивость состояния сознания, которые могут стимулироваться наглядными моделями. Следуя работам Я. А. Пономарева, В. Н. Дружинина, В. И. Загвязинского, А. И. Савенкова, М. М. Кашапова и других выделим основные *факторы успешности* решения учебных задач наглядным моделированием в инновационной деятельности будущего инженера:

- Потребность в поисковой активности, глобальная иррациональная мотивация отчуждения от мира, направленная тенденцией к преодолению, мотивация личностного роста;

- Способность действовать в уме, определенная высоким уровнем развития внутреннего плана действий, способность преодолевать стереотипы;

- Стимуляция дивергентного мышления путем порождения множества решений на основе однозначных данных в ситуациях неопределенности и выбора, сравнительная отдаленность предметных областей проблемы;

- Критичность мышления и стремление к новизне, качеству получаемого результата; ориентация на самоактуализацию личности.

Выделенные факторы успешности решения задач в творческой деятельности отражают главные направления личностно-ориентированного подхода к процессу формирования творческой активности студента в ходе наглядного моделирования как атрибута инновационной деятельности. Каждый фактор характеризуется своим набором эмпирических показателей. Это позволяет разрабатывать необходимые в педагогической практике диагностические средства и проводить соответствующие замеры. Несмотря на обобщенный характер, они целостно отражают специфику наглядного моделирования в математической деятельности. Их использование будущими инженерами позволит более эффективно взаимодействовать в учебном процессе со специальными предметами и исследовательскими задачами. Такими *педагогическими условиями*, сопровождающими процесс наглядного моделирования, могут быть: проектирование взаимопереходов знаковых систем (символической, образно-геометрической, вербальной, тактильно-кинестетической и конкретно-деятельностной), наличие

уровневой и иерархической структур рассматриваемых моделей, вариативность подходов и интеграция знаковых структур, актуализация уровней усвоения и сложности математических объектов и процедур, активизация психических процессов разного уровня и модальности.

Немаловажно, что еще с начала XX в. целый ряд психологов (О. Зельц, М. Вертгеймер, М. Бунге и др). подчеркивали существенность процесса визуализации исследовательской ситуации как важного этапа решения задачи. Эти процессы становятся тем важнее для понимания сущности рассматриваемых объектов и явлений, когда явно проявляется существенность того или иного свойства анализом наглядных моделей. Интересно отметить, что подобные вопросы возникают при анализе деятельности оператора автоматизированных систем управления (АСУ) в инженерной психологии, так как основным видом его деятельности является деятельность с информационными моделями. В информационную модель включаются данные об объектах управления, состоянии внешней среды и самой системы управления. «Информационная модель

для оператора является источником информации, пользуясь которой он оценивает ситуацию и принимает решения, обеспечивающие правильную работу системы и выполнение возложенных на нее задач» [11, с. 122]. Работая с информационной моделью (доска управления, индикаторы, экраны и т. п.), оператор АСУ принимает решения вне непосредственного контакта с реальностью и объективно заинтересован в получении достоверной информации и адекватном реагировании на изменения ситуации. При этом наблюдаются очевидные аналогии с процессом обучения и проблемой наглядного моделирования объектов и действий. «Информационная модель должна быть наглядной, то есть оператор должен иметь возможность воспринимать сведения, даваемые моделью быстро и без их кропотливого анализа» [11, с. 497].

Следующая таблица показывает прямые аналогии содержания понятия наглядного моделирования в обучении и требований к информационным моделям в инженерной психологии [11, с. 496–500].

Таблица 1

№	Существенные связи наглядного моделирования в обучении	Требования к проектированию информационных моделей в инженерной психологии
1	Отражение существенных свойств, отношений, взаимодействий математических объектов и действий	Модель представляет собой абстракцию, в которой сохраняются существенные свойства, отношения, взаимодействия
2	Непосредственное восприятие математических объектов и действий	Модель должна быть наглядной то есть сведения, поставляемые моделью, должны быть восприняты быстро и без их кропотливого анализа
3	Адекватность категории диагностично поставленной цели результатам внутренних действий обучаемых	Модель должна быть геометрически подобной их (структурных компонентов объекта) действительному расположению
4	Моделирование существенных свойств математических объектов и действий	Модель имеет правильную организацию структуры (отбор того существенного и типичного, что позволяет с максимальной эффективностью донести существо реальной ситуации)
5	Устойчивость результатов внутренних действий обучаемых, соответствие законам психологии восприятия	Необходимо учитывать психофизиологические возможности человека

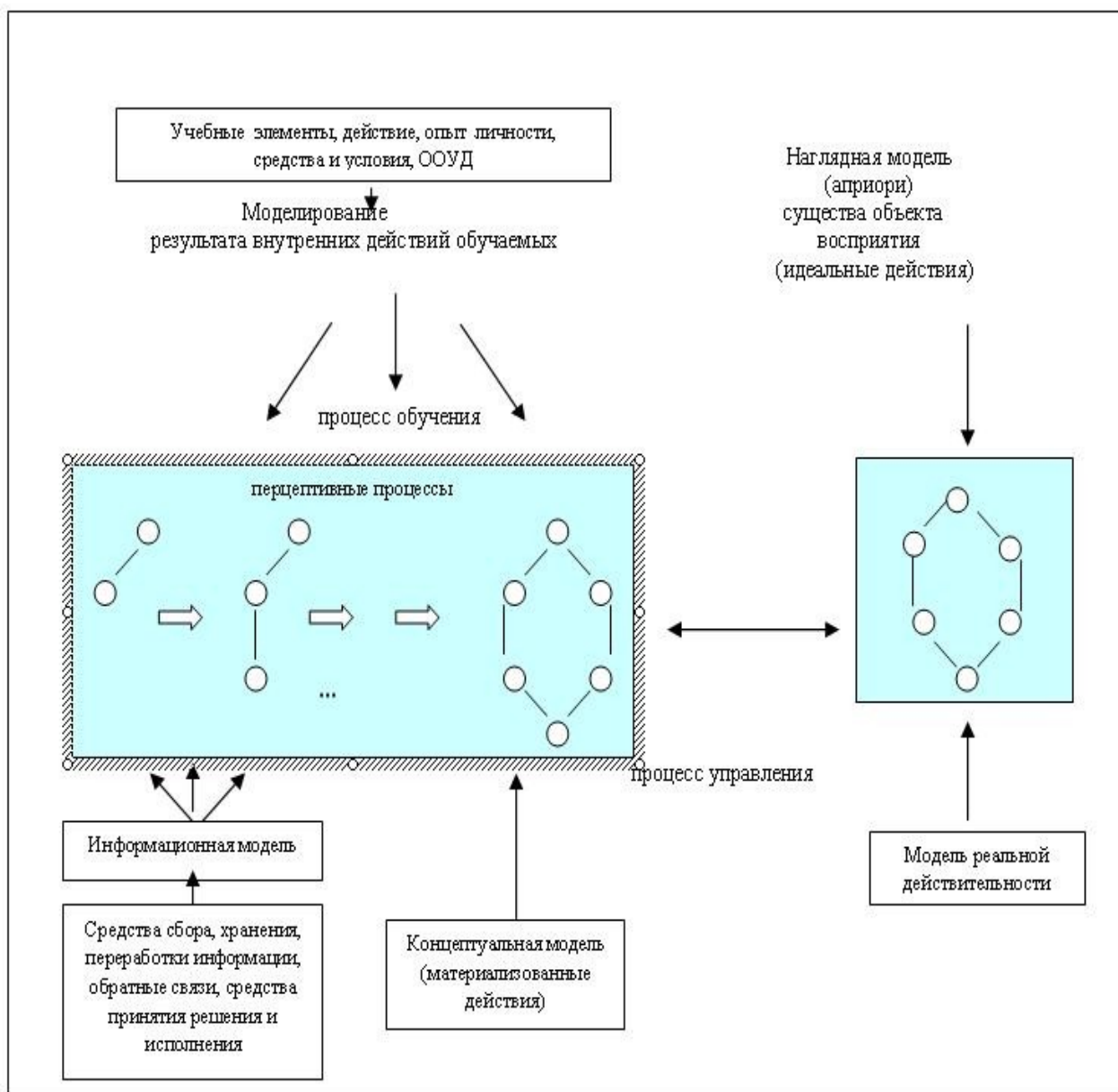
Критерием эффективности при работе с информационной моделью (так же как и с наглядной моделью в обучении) должны служить время и точность выполнения заданий при получении успешного результата. Безусловно, что в учебной

деятельности критерием эффективности управляющих воздействий служат также (и в первую очередь) академическая успешность и позитивные изменения в когнитивной и аффективной сферах личностного развития.

Схема 2

Аналогия процессов наглядного моделирования в обучении и работы оператора АСУ

ПРОЦЕСС НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ОБУЧЕНИИ



ПРОЦЕСС РАБОТЫ ОПЕРАТОРА АСУ



## ПРОЦЕСС УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

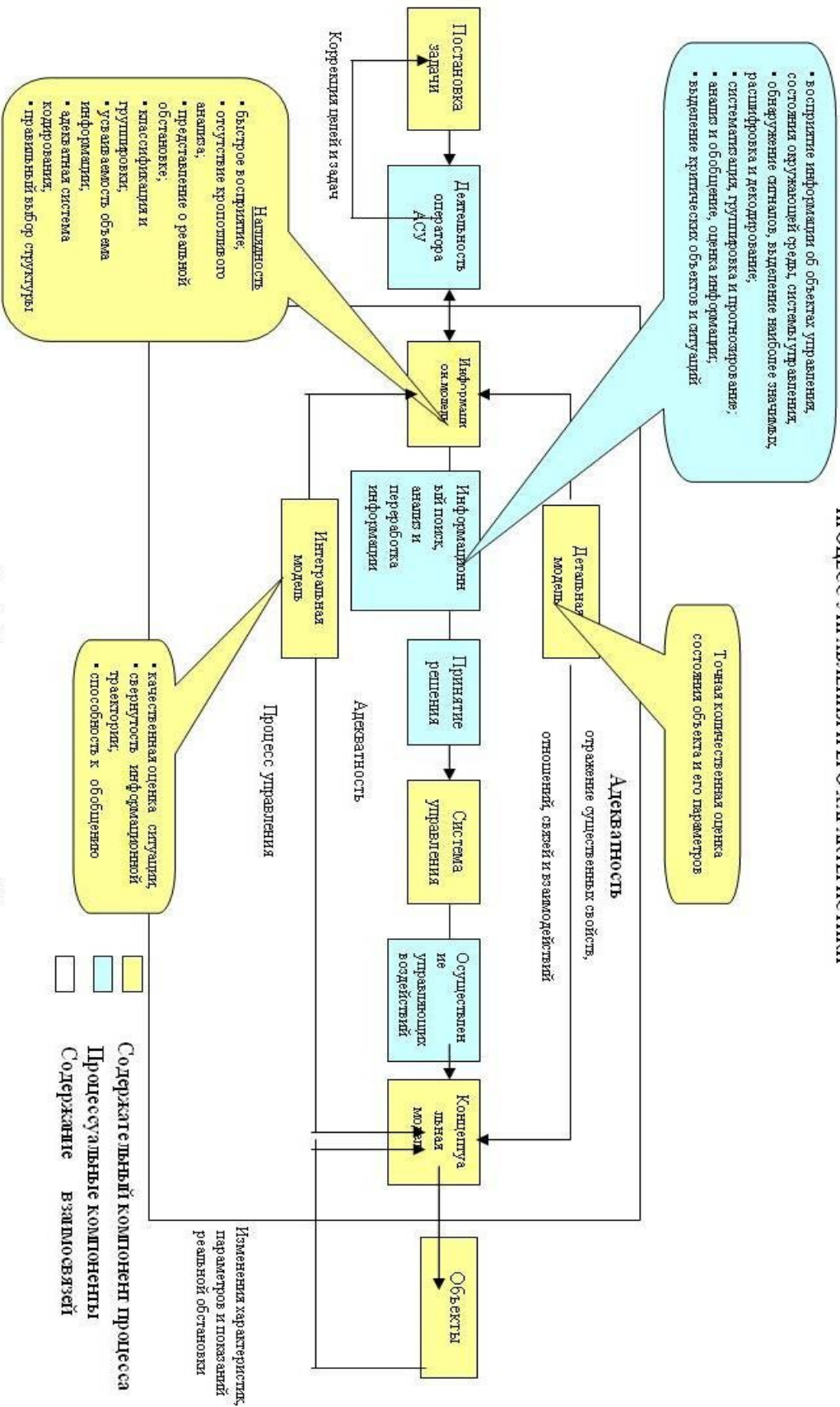


Рис. 2. Этапы деятельности оператора АУ

Таким образом, важнейшим механизмом инновационного изменения содержания, средств и технологий обучения математике будущих инженеров является проектирование фундирующих модусов для эффективности реализации профессиональных задач на основе наглядного моделирования учебных элементов, явлений и процессов. Это могут быть банки спиралей и кластеров фундирования математических объектов и процессов, фундирующие комплексы профессионально-ориентированных и исследовательских задач (в том числе, историко-генетического характера), графы согласования предметных и специальных знаний, проектирование дидактических модулей учебных разделов на основе преемственности и единства логической структуры (аннотированные учебные программы, опорные таблицы учебных элементов и методов, интегративные экзаменационные программы и т. п.), использование информационно-коммуникационных технологий (Web-технологии, графические калькуляторы, системы компьютерной алгебры и динамической геометрии) и мн. др.

#### **Библиографический список:**

1. Арнольд, В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели [Текст] / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2000. – 32 с.
2. Зинченко, В. П. Образ и деятельность [Текст] / В. П. Зинченко. – М. : Изд-во «Институт педагогической психологии» ; Воронеж : НПО «МОДЭК», 1997. – 608 с.
3. Леонтьев, А. Н. Деятельность, сознание, личность [Текст] / А. Н. Леонтьев. – М. : ИПЛ, 1975. – 304 с.
4. Моисеев, Н. Н. Простейшие математические модели экономического прогнозирования [Текст] / Н. Н. Моисеев. – М. : Знание, 1975. – 63 с.
5. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика [Текст] : учеб. пособ. / под ред. Е. И. Смирнова. – Ярославль : ИПК «Индиго», 2007. – 454 с.
6. Салмина, Н. Г. Знак и символ в математике [Текст] / Н. Г. Салмина. – М. : Изд-во МГУ, 1988. – 288 с.
7. Смирнов, Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ. – 1997. – 323 с.
8. Фридман, Л. М. Наглядность и моделирование в обучении [Текст] / Л. М. Фридман. – М. : Знание, 1984. – 79 с.
9. Bloom, B. S. Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Handbook 1.: Cognitive Domain. N.Y. David McKey Co: 1956.
10. Guilford, J. P. The Nature of Human Intelligence. N.Y. : David McKey Co.: 1967.
11. De Block, A. Taxonomic van Leerdoelen. Amsterdam: Standard Wetenschappelijke Uitgererij: 1975.