УДК 517.5

**П. А. Корнилов**

## Расходящиеся ряды Фурье интегрируемых функций

В данной статье доказывается, что для любой ограниченной в совокупности ортонормированной системы функций на отрезке [0,1] можно построить интегрируемую, по Лебегу, функцию, ряд Фурье которой по данной системе расходится с определенной скоростью на некотором множестве положительной меры.

**Ключевые слова:** ортонормированные системы, ряды Фурье, расходящиеся ряды, интегрируемые по Лебегу функции.

**P. A. Kornilov**

## Fourier Dispersing Ranks of Integrated Functions

Here is proved that for any bounded orthonormal system of functions on segment [0,1] there is a Lebesgue integrable function, Fourier series of which diverges on some set of positive measure with some speed.

**Keywords:** orthonormal systems, Fourier series, divergent series, Lebesgue integrable functions.

В 1923 году А. Н. Колмогоров, исследуя ряды Фурье, впервые построил пример интегрируемой по Лебегу функции на отрезке [0,2π], ряд Фурье которой расходится почти всюду [2, с. 480]. В дальнейшем исследования этого вопроса шли по двум направлениям, с одной стороны, исследовалась возможная скорость расходимости ряда Фурье интегрируемых функций, а с другой стороны, пытались получить достаточные условия сходимости почти всюду рядов Фурье. В 1964 году Е. М. Стейн, усовершенствовав конструкцию А. Н. Колмогорова, в работе [3] доказал, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть $\lambda(n) > 0$ и монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда существует f(x), принадлежащая классу L([0,2π]), для которой почти при всех $x \in [0,2\pi]$ не выполнено неравенство $\left|S_n(x,f) - S_m(x,f)\right| = O(\lambda(n-m) * \log(n-m))$.

Для функций с интегрируемым квадратом хорошо известна теорема о том, что их ряды Фурье сходятся по норме пространства $L_2$([a,b]) к самой функции. Исследуя проблему, поставленную Фурье, Карлесону удалось доказать, что для всех функций из $L_2$([a,b]) их ряды Фурье сходятся к самим функциям почти всюду на отрезке [a,b]. После появления теоремы в печати ее доказательство было обобщено Хантом на случай пространств $L_p$([a,b]) для всех p>1. Таким образом, из всей шкалы пространств $L_p$([a,b]) только в пространстве $L_1$([a,b]) существуют функции, ряды Фурье которых расходятся почти всюду.

В 1978 году С. В. Бочкареву в работе [1] удалось перенести пример Колмогорова со случая рядов по тригонометрической системе на случай произвольной ортонормированной системы (ОНС) функций на отрезок [0,1], ограниченной в совокупности.

Используя одну из доказанных Бочкаревым в названной выше работе лемм, а также идеи работ Колмогорова и Стейна, мы в данной статье перенесем результат Стейна на случай произвольной ОНС функций на [0,1].

А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема**. Пусть на отрезке [0,1] задана ОНС функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что найдется число M>0 такое, что для любых натуральных k и вещественных $x \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$\left|\varphi_k(x)\right| < M \qquad (1)$$

Пусть далее задана произвольная последовательность положительных чисел $\lambda(n)$ такая, что $\lambda(n) > \lambda(n+1)$ и $\lambda(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда найдется интегрируемая по Лебегу функция $f(x)$

и некоторое множество $E \subset [0,1]$, mes E >0 такое, что для любого $x \in E$ не выполнено ограничение $\left|S_n(x,f) - S_m(x,f)\right| = O(\lambda(n-m) * \log(n-m))$. Здесь $S_n(x,f)$ – значение в точке x n-й частичной суммы ряда Фурье функции по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько лемм.

**Лемма 1** (С. В. Бочкарев, [1]). Для любой ограниченной в совокупности ОНС функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке [0,1] найдутся положительные числа $\gamma, B > 0$ такие, что для любого натурального N существует множество $\Omega \subset \{(t, \theta_1, \theta_2, .., \theta_N), 0 \le t \le 1, 0 \le \theta_i \le 1, i = 1,2,..., N\}$ такое, что $mes(\Omega) \ge \gamma > 0$ и для любой точки $(t, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_N) \in \Omega$ выполнено

$$\overline{\lim} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=Np}^{m_p(t)} \varphi_k(t) \varphi_k(\theta_i) \ge B * \log(N) \text{ при } p \to \infty, \qquad (2)$$

где $\{m_p(t)\}_{p=1}^{\infty}, Np \le m_p(t) < N(p+1)$ – последовательность натуральных чисел.

**Лемма 2** [2, с. 340]. Для любого подмножества $E \subset [0,1]$, mes E >0, и любого числа $\lambda > 1$ найдется натуральное $N_0 = N_0(E, \lambda)$ такое, что для любого ряда $p(t) = \sum_{k=N_0}^{\infty} c_k r_k(t)$, по системе Радемахера, при выполнении условия $\sum_{k=N_0}^{\infty} (c_k)^2 < \infty$ справедливо неравенство

$$\lambda^{-1} mes(E) \sum_{k=N_0}^{\infty} (c_k)^2 \le \int_E \left|p(t)\right|^2 dt \le \lambda * mes(E) \sum_{k=N_0}^{\infty} (c_k)^2 \qquad (3)$$

**Лемма**. В условиях теоремы найдется такое $\gamma > 0$, такая последовательность функций $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}, f_i \in L([0,1])$ и такая последовательность множеств $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}, E_i \subset [0,1], mes(E_i) \ge \gamma > 0$, что для любого $x \in E_i$ можно найти пару натуральных чисел $l_i(x) = (n_i(x), m_i(x))$, что выполнены следующие свойства:

а) $\left[T_{l_i(x)}(f_i)\right](x) \ge 1$, где операторы $T_l$ определены при $l = (n,m), n > m$ следующим образом $\left[T_l(f)\right](x) = \dfrac{S_n(x,f) - S_m(x,f)}{\lambda(n-m) * \log(n-m)}$

б) $n_i(x) - m_i(x) \ge 2^{2i-1}$

в) $\sum_{i=1}^{\infty} \left\|f_i\right\|_{L([0,1])} < \infty$.

**Доказательство леммы**.

Отметим сначала, что поскольку функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежат классу $L^2([0,1]) \subset L([0,1])$, то множество тех точек $\theta \in [0,1)$, где имеет место неравенство $\lim\limits_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi_k(\theta + u) du = \varphi_k(\theta), k = 1,2,...$ имеет полную меру на отрезке [0,1], а значит, и для любого натурального N множество $G_N$ тех точек $\theta^{(N)} = (\theta_1^{(N)}, ..., \theta_N^{(N)})$, для которых при любых натуральных К и любых натуральных *i*, $1 \le i \le n$, выполнено

$$\lim_{h \to +0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi_k(\theta_i^{(N)} + u) du = \varphi_k(\theta_i^{(N)}), k = 1,2,... \qquad (4)$$

имеет полную меру в N-мерном единичном кубе. Отсюда и из леммы 1 следует, что для любого натурального N найдется точка $\theta^{(N)}$ из $G_N$ такая, что $\overline{\lim}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=Np}^{m_p(t)}\varphi_k(t)\varphi_k(\theta_i)\geq B*\log(N)$, где натуральные числа $m_p(t)$ лежат в интервалах $[pN,(p+1)N)$, и неравенство выполнено для всех $t\in E_n, mesE_n\geq\gamma_1>0$.

Теперь выберем последовательность $N_i=4^i$ и для этих $N_i$ выберем соответствующие точки $\theta^{(i)}=(\theta_1^{(i)},...,\theta_{N_i}^{(i)})$, соответствующие последовательности $\{m_p^{(i)}(t)\}_{p=1}^{\infty}, pN_i\leq m_p^{(i)}(t)<(p+1)N_i$ и соответствующие множества $\widetilde{E}_i\subset[0,1], mes\widetilde{E}_i\geq\gamma_i>0$ такие, что для любого $t\in\widetilde{E}_i$ выполнено неравенство (2).

Вспомнив, что $\theta_i\in G_{N_i}$, из неравенства (2) получаем, что найдется натуральное число $L_i$ такое, что при всех $t\in E_i\subset[0,1], mesE_i\geq\gamma>0$ выполнено

$$\max_{p<L_i}\left\{\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{k=pN_i}^{m_p^{(i)}(t)}\varphi_k(t)\varphi_k(\theta_j^{(i)})\right\}\geq\frac{B}{2}\log(N_i) \qquad (5)$$

и что найдется число $h_i>0$ такое, что:

1) $\theta_j^{(i)}+h_i\leq 1$ при любых $j=1,2,...,N_i$ и

2) $N_i\left|\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\varphi_k(\theta_j^{(i)}+u)du-\varphi_k(\theta_j^{(i)})\right|\leq 1$ при любых $j=1,2,...,N_i$ и любых $k\leq L_iN_i$.

Введем в рассмотрение функции $\overline{f}_i(t)=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}\delta_i(\theta_j^{(i)},t)$, где

$$\delta_i(x_0,t)=\begin{cases}h_i^{-1}, t\in[x_0,x_0+h_i]\\ 0, иначе\end{cases}.$$

Тогда функции $\overline{f}_i\in L[0,1]$, и, более того, $\|\overline{f}_i\|_{L([0,1])}=1$.

Выберем теперь произвольное $x\in E_i$ и то $p_i(x)<L_i$, при котором достигается максимум в левой части неравенства (5). Тогда имеем:

$$\sum_{k=p_i(x)N_i}^{m_{p_i}^{(i)}(x)}a_k(\overline{f}_i)\varphi_k(x)\geq\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{k=p_i(x)N_i}^{m_{p_i}^{(i)}(x)}\varphi_k(x)\varphi_k(\theta_j^{(i)})-$$
$$-\left[\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{k=p_i(x)N_i}^{m_{p_i}^{(i)}(x)}\varphi_k(x)\left[\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\varphi_k(\theta_j^{(i)}+u)du-\varphi_k(\theta_j^{(i)})\right]\right]\geq\frac{b}{2}\log N_i-M\geq c*\log N_i \text{ при } i\geq i_0.$$

Здесь $a_k(f)$ означают коэффициенты Фурье функции *f* по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. В приведенной выкладке мы воспользовались условием 2) и неравенствами (2) и (4). Далее, рассмотрев следующие три отрезка ряда Фурье функции $f_i(x)$:

$$\sum_{k=p_i(x)N_i}^{m_{p_i(x)}^{(i)}(x)},\quad\sum_{k=m_{p_i(x)}^{(i)}(x)+1}^{(p_i(x)+1)N_i-1},\quad\sum_{k=p_i(x)N_i}^{(p_i(x)+1)N_i-1},$$

мы можем выбрать один из них со следующими свойствами:

3) количество слагаемых не меньше чем $\frac{N_i}{2}=2^{2i-1}$

4) $\sum_{k=m_i(x)-1}^{n_i(x)} a_k(\overline{f}_i)\varphi_k(x) \geq \frac{c}{2}\log N_i = A * LogN_i$ при $i \geq i_0$.

Тогда пара $(n_i(x), m_i(x)) = l_{i(x)}$ и составит нужный нам индекс у оператора $T_{l_i(x)}$. Посмотрим на значение этого оператора в точке *x* после действия на $\overline{f}_i(t)$:

$$\left[T_{l_i(x)}(\overline{f}_i)\right](x) = \frac{S_{n_i(x)}(x,\overline{f}_i) - S_{m_i(x)}(x,\overline{f}_i)}{\lambda(n_i(x)-m_i(x)) * \log(n_i(x)-m_i(x))} \geq \frac{A * \log N_i}{\lambda(N_i/2) * \log(n_i(x)-m_i(x))} \geq \frac{A}{\lambda(N_i/2)},$$

поскольку $(n_i(x)-m_i(x)) \geq N_i/2$ и $i \geq i_0$.

Введем теперь новые функции $\widetilde{f}_i(t) = \frac{1}{A}\lambda(2^{2i-1})\overline{f}_i(t)$. В силу линейности операторов $T_l$ при любом $x \in E_i$ мы имеем: $\left[T_{l_i(x)}(\widetilde{f}_i)\right](x) \geq 1$ при $i \geq i_0$. К тому же, заметим, что $\left\|\widetilde{f}_i\right\|_{L([0,1])} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, поскольку $\lambda(n)$ монотонно стремится к 0. Поэтому мы можем выбрать из последовательности $\left\{\widetilde{f}_i\right\}_{i=i_0}^{\infty}$ подпоследовательность $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что выполнено неравенство: $\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{L([0,1])} < \infty$.

Беря соответственно и последовательность множеств $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}, mesE_i \geq \gamma > 0$, мы видим, что все условия леммы выполнены и лемма доказана.

Покажем **схему доказательства теоремы** с использованием результата леммы. Сначала по известной тереме о числовых рядах мы подбираем множители $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $R_i > 0, R_i$ монотонно возрастают до бесконечности и $\sum_{i=1}^{\infty} R_i\|f_i\|_{L([0,1])} < \infty$.

Далее вводим в рассмотрение функцию $F(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i(t)R_i f_i(x)$ по системе Радемахера (здесь $r_i(t) = sign(\sin(2^{i-1}\pi t)), t \in [0,1]$). Затем, используя лемму 2 и неравенство $\sum_{i=1}^{\infty} R_i\|f_i\|_{L([0,1])} < \infty$, проверяем фундаментальность последовательности частичных сумм в пространстве $L([0,1]^2)$ и делаем вывод о сходимости в данном пространстве, а значит, и о сходимости почти всюду, некоторой подпоследовательности частичных сумм ряда. По теореме Фубини, почти при всех $t \in [0,1]$ функция $F(x,t)$ является интегрируемой по Лебегу. Далее применяем к ней операторы $T_l$ и проверяем, что функции $T_l(F(x,t))$ как функции переменного t принадлежат классу $L^2([0,1])$. Если предположить, что теорема неверна, то для любой функции $f \in L([0,1])$ для почти всех $x \in [0,1]$ выполнено неравенство $\left[T^*(f)\right](x) = \sup_l |T_l(f)|(x) < \infty$. Отсюда следует, что почти всюду на [0,1]x[0,1] выполнено $(T^*F)(x,t) < \infty$. Однако если взять множество положительной меры $\mathrm{E} \times I \subset [0,1]\times[0,1]$, где $\mathrm{E} = \overline{\lim} E_i$, то с помощью Леммы 2 и несложных выкладок можно получить противоречие, что и завершит доказательство теоремы.

**Замечание.** Если для какой-либо ОНС функций на отрезке [0,1] можно в лемме 1 заменить в правой части неравенства (2) B*log(n) на более быстро растущую монотонную последовательность $A_n$, то и в теореме можно будет заменить оценку $O(\lambda(n-m) * \log(n-m))$ на оценку $O(\lambda(n-m) * A(n-m))$, причем доказательство полностью сохранится.

**Библиографический список**

1. Бочкарев, С. В. О расходящемся на множестве положительной меры ряде Фурье для произвольных ограниченных ОНС [Текст] / С. В. Бочкарев // Матем. сборник. – 1975. – Т. 98 (140), № 3 (11). – С. 37–49.
2. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т. 1 [Текст] / А. Зигмунд. – М. : Наука, 1982 г.
3. Stein E.M. On limits of sequences of operators, Ann. Math., Ser.2, 1961, V.74, №1, p.140-170.