

М. В. Шабанова, Т. С. Ширикова

Обучение доказательству с использованием интерактивной геометрической среды

В статье представлен новый подход к обучению доказательству учащихся основной школы. Особенностью предлагаемого подхода является использование возможностей интерактивной геометрической среды для поэтапного перевода учащихся с эмпирического уровня сформированности умений обосновывать истинность утверждений на абстрактно-теоретический уровень. Главным отличием абстрактно-теоретического уровня сформированности умений доказывать от эмпирического уровня является готовность к логическому объяснению геометрического факта, обнаруженного в ходе компьютерного эксперимента. Эмпирический уровень характеризуется лишь умением использовать компьютерный эксперимент в качестве метода установления истинности.

Ключевые слова: методика обучения доказательству, интерактивная геометрическая среда, обучение геометрии в основной школе.

M. V. Shabanova, T. S. Shirikova

Training to the Proof with Use of Interactive Geometrical Environment

The new approach is presented to train pupils of the secondary school to get the proofs. The singularity of the offered approach is the usage of possibilities of interactive geometrical environment for the step-by-step transfer of pupils from the empirical level of generation abilities to justify the validity of statements to the abstract-theoretical level. The principal difference of this abstract-theoretical level of abilities to prove the statement from an empirical one is the readiness for a logical explanation of the geometrical fact, which was found during a computer experiment. The empirical level is characterized only by the ability to use a computer experiment as a method of validity establishment.

Key words: the training technique to the proof, the interactive geometrical environment, Geometry training at the comprehensive school.

Обучение доказательству геометрических утверждений является одной из основных целей школьного курса геометрии, которая традиционно связывается с формированием умений подтверждать истинность утверждений и правильность принимаемых решений логическими выводами дедуктивного характера. Эта традиция восходит к периоду развития математики, когда только рассуждения, опирающиеся на правила логического вывода, считались убедительными и строгими. Сегодня отношение математиков к логическому доказательству постепенно меняется под влиянием компьютерной техники [1]. Они всерьез задумываются над той ролью, которую играет в обосновании истинности теорем компьютерный эксперимент, проводимый по схеме полной индукции (компьютерное «доказательство»). Приведем в подтверждение сказанному слова из выступления Н. А. Вавилова, д.ф.-м.н., профессора кафедры алгебры и теории чисел математико-механического факультета СПбГУ на совместном заседании Санкт-Петербургского Математического общества и секции математики

Дома ученых, 23.03.2010: «...В последнее время все чаще обсуждается вопрос об изменении статуса доказательства и уменьшении нашей уверенности в справедливости результатов. Критика и скептицизм подобного рода наиболее энергично, часто и агрессивно озвучиваются в двух следующих направлениях: сомнения в надежности доказательств, выполненных с помощью компьютера; сомнения в надежности исключительно длинных и сложных доказательств... что касается компьютерных вычислений, то лично я склонен доверять им больше, чем любым математическим доказательствам, кроме самых простых...».

Не ожидая разрешения спора ученых, обратимся к оценке образовательной значимости компьютерного эксперимента в обучении школьников доказательству теорем.

Необходимость овладения информационными технологиями в процессе изучения всех предметов школьного курса, в том числе и геометрии, определены введением следующих требований к метапредметным результатам освоения основной

образовательной программы основного общего образования новым ФГОС ОО: «<...> формирование и развитие компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (далее ИКТ-компетенции)» [2]. Возможность удовлетворения этому требованию стандарта при обучении геометрии обеспечивается специализированным программным обеспечением – интерактивными геометрическими средами (ИГС): GeoGebra, GeoNext, Живая математика, Математический конструктор, а также создаваемыми на основе этого программного обеспечения цифровыми образовательными ресурсами (ЦОР) [3, 4, 5]. Достоинством названного программного обеспечения и основанных на нем ЦОР является интерактивность, то есть возможность не только внесения начальных данных пользователем для построения изображения геометрической конфигурации, но и изменение и параметризация этих данных без изменения общего алгоритма построения чертежа, а также возможность оперативного получения интересующих пользователя сведений о свойствах изо-

браженных фигур. Свойство интерактивности позволяет рассматривать ИГС, как программное средство для проведения компьютерного эксперимента.

Включение компьютерного эксперимента в систему методов обоснования геометрических утверждений позволит, на наш взгляд, снять многие трудности, которые испытывают учащиеся 7 класса на первых этапах изучения систематического курса геометрии. Основной причиной этих трудностей является навязывание с первых уроков обучения геометрии точки зрения на доказательство, противоречащей содержанию субъектного опыта учащихся.

Проведенный нами опрос учащихся 7 классов пилотных площадок проекта «Методики и информационные технологии в образовании» (МИТЕ) в Архангельской области (164 учащихся) показал, что наиболее характерными критериями убедительности для учащегося данного возраста является критерий очевидности, то есть подросток безоговорочно доверяет лишь тому, что увидел своими глазами (рис. 1).



Рис. 1

Диаграмма показывает, что критерий «Правильные» (логические) рассуждения находится лишь на третьем месте.

С точки зрения полученных данных, результаты компьютерного эксперимента являются более убедительными для учащихся, чем логические доказательства.

Приведем пример использования компьютерного эксперимента для демонстрации справедливости вводимого утверждения «биссектрисы вер-

тикальных углов лежат на одной прямой» (такое использование компьютерного эксперимента условно назовем «компьютерным доказательством», акцентируя внимание на познавательной функции эксперимента).

Пример: Докажите, что при любом значении угла между прямыми, биссектрисы образованных ими вертикальных углов лежат на одной прямой (рис. 2).

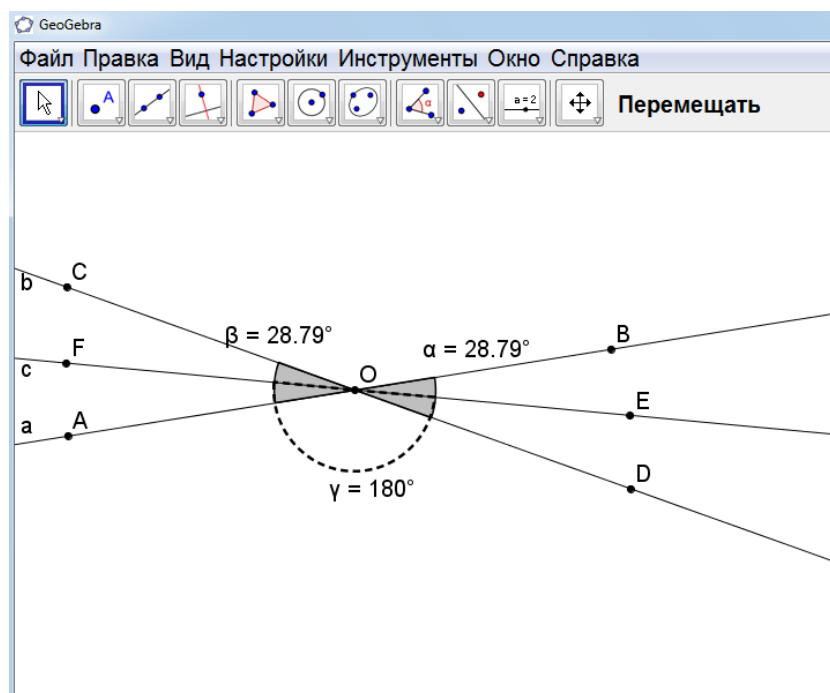


Рис. 2

Применение этого метода требует:

- построения, так называемого «динамического чертежа», то есть чертежа допускающего непрерывные изменения изображенных на нем объектов (в нашем случае величин вертикальных углов) при сохранении основных свойств чертежа (углы должны оставаться вертикальными, а лучи, выходящие из их вершин – биссектрисами);

- вывода на экран «динамического текста», то есть текста, на котором будет отражаться изменение параметров (величин вертикальных углов) и результат измерения исследуемых метрических свойств элементов чертежа (угла между биссектрисами).

«Компьютерное доказательство» в рассматриваемом примере будет представлять собой следующее индуктивное умозаключение:

- Так как для каждой величины угла из промежутка от 0° до 180° значение угла между биссектрисами вертикальных углов в ходе эксперимента оставалось равным 180° , то можно считать, что угол между биссектрисами не зависит от величин самих вертикальных углов.

- Так как он равен 180° , то биссектрисы лежат на одной прямой.

Приведенный пример показывает, что «компьютерные доказательства», в отличие от логических, не только убеждают учащихся в спра-

ведливости геометрических утверждений, но и раскрывают перед ними область их истинности. Этот эффект достигается за счет демонстрации динамической устойчивости доказываемого свойства геометрической конфигурации на введенных параметрах.

При этом мы вовсе не считаем, что «компьютерным доказательством» можно подменить логическое. Во-первых, потому, что оно вызывает у многих математиков недоверие, так как доказать корректность компьютерной программы зачастую гораздо сложнее, чем убедиться в корректности логического доказательства (задача разработки экспертных систем пока не решена). Во-вторых, каждое из этих видов доказательств обладает своими образовательными функциями:

- «компьютерное доказательство» убеждает школьников в истинности геометрических утверждений, за счет демонстрации динамической устойчивости свойств чертежа;

- логическое доказательство раскрывает причины наблюдаемой динамической устойчивости за счет установления логической связи доказываемого и заданных свойств чертежа.

При использовании ИГС и основанных на них ЦОР, обучение доказательству может быть представлено как процесс поэтапного перехода от овладения «компьютерным доказательством» к овладению логическим через критическое

переосмысление первого. При этом можно говорить о существовании трех основных уровней сформированности умений проводить доказательства с использованием ИГС (они могут рассматриваться как этапные цели обучения доказательству в школьном курсе геометрии):

I. Эмпирический уровень характеризуется умением убеждаться в справедливости геометрических положений с помощью компьютерного эксперимента на готовом динамическом чертеже, делать выводы из результатов эксперимента с учетом введенных параметров.

II. Технологический уровень характеризуется умением осуществлять логический контроль правильности алгоритма построения динамического чертежа для целей «компьютерного доказательства» с опорой на результаты анализа условия теоремы, а также умением делать выводы об установленной области истинности утверждения с учетом полноты экспериментальных проб.

III. Абстрактно-теоретический уровень характеризуется умением логически объяснять ус-

тановленный в ходе компьютерного эксперимента факт динамической устойчивости свойства геометрической конфигурации, то есть проводить логические доказательства; а также использовать логические доказательства для ликвидации выявленных недостатков эксперимента.

Опишем особенности методики работы с теоремой, которые характеризуют процесс продвижения по названным уровням.

1. *Методика работы с теоремой в ИГС на эмпирическом уровне обучения доказательству (пропедевтический курс геометрии, начало систематического).*

В связи с тем, что для достижения эмпирического уровня необходимо «окультурить» субъектный опыт учащихся, связанный с использованием эмпирических методов обоснования истинности, то основу методики должна составлять идея интеграции субъектного и социокультурного опыта – подход, предложенный И. С. Якиманской [6] (табл. 1).

Таблица 1

№	Этапы интеграции опытов по И. С. Якиманской	Описание этапов работы с теоремой
1	Актуализация субъектного опыта учащихся, отнесенного к изучаемому вопросу	Постановка перед учащимися творческого задания – придумать способ наглядной демонстрации справедливости геометрического утверждения на готовом динамическом чертеже. Результатом выполнения этого задания с опорой на субъективные представления учащихся о «наглядной убедительности» и знания о возможностях ИГС будут различные варианты проведения компьютерного эксперимента
2	Раскрытие содержания субъектного опыта учащихся	Данный этап связан со сбором данных о многообразии планов проведения эксперимента, по предложениям учащихся (на данном этапе эти планы не должны поддаваться критике)
3	«Окультуривание» содержания субъектного опыта учащихся через его сопоставление с социокультурным образцом и переосмысление	Перед учащимися может быть поставлено задание сделать обоснованный выбор из всех предложенных ими планов проведения компьютерных экспериментов такого, который позволяет получить наиболее убедительные свидетельства динамической устойчивости доказываемого свойства. Результатом выполнения подобных заданий является установление и обсуждение наиболее типичных ошибок, совершаемых учащимися при планировании эксперимента
4	Формирование нового субъектного опыта учащихся	Введение правил постановки и описания компьютерного эксперимента (с учетом аналогичных правил, введенных в ходе изучения смежных предметов) и формирование умений проводить «компьютерное доказательство» следуя этим правилам

2. *Методика работы с теоремой в ИГС на технологическом уровне обучения доказательству (8 класс).*

В связи с тем, что для достижения технологического уровня необходимо приобрести умения осуществлять теоретический контроль корректности построения и использования динамического чертежа при проведении «компьютерных доказательств», то основу методики должен составлять подход к обучению обоснования ком-

пьютерных программ, применяемый в методике обучения Информатики и ИКТ. Обоснование компьютерной программы представляет собой снабжение ее дополнительной информацией, объясняющей логическое строение программы, облегчающей проверку ее корректности, следовательно, в методику работы с теоремой на этом этапе обучения должны быть внесены следующие дополнения (табл. 2):

Таблица 2

№ п/п	Этапы обучения обоснованию программного обеспечения	Этапы обучения обоснованию динамического чертежа
1	Мотивация дополнения разработанной программы обоснованием	Постановка индивидуального задания на разработку алгоритма построения динамического чертежа для проведения компьютерного эксперимента. Включение учащихся в деятельность презентации разработанных ими алгоритмов с целью подведения их к постановке проблемы выбора
2	Ознакомление со способами обоснования программ	Ознакомление с обоснованием алгоритма построения динамического чертежа имеет смысл начинать с рассказа о более известном методе проверки корректности алгоритмов – тестировании, то есть проверки соответствия результатов действия программы эталонам. Здесь важно показать, что тестирование позволяет обнаружить лишь один тип ошибок – неустойчивость свойств динамического чертежа, описанных условием теоремы. Более широкими возможностями обладает обоснование. Оно является разновидностью семантической проверки корректности программы, то есть проверки корректности алгоритма по смыслу его шагов и их последовательности. Сегодня такую проверку проводят специальные экспертные программы, которые сопоставляют шагам и группам шагов алгоритма утверждения, хранящиеся в базе знаний [7]. В качестве утверждений для семантической проверки построения динамических чертежей могут использоваться аксиомы, определения и теоремы геометрии
3	Обучение обоснованию и использованию обоснований для проверки корректности программ	Включение учащихся в деятельность обоснования собственных алгоритмов с последующим использованием этих обоснований при выборе из предложенных алгоритмов того, который может быть использован в ходе «компьютерного доказательства» утверждения

3. Методика работы с теоремой в ИГС на абстрактно-теоретическом уровне обучения доказательству (9 класс)

Основной целью данного этапа является формирование умений логически объяснять не только выбор алгоритма построения динамического чертежа для экспериментального обоснования динамической устойчивости исследуемого свойства, но и сам факт динамической устойчивости. В связи с этим основу методики обучения доказательствам на данном уровне должен составлять когнитивно-визуальный подход к обучению логическим доказательствам, предложенный В. А. Далингером [8]. Данный подход позволяет осуществить постепенный переход от оперирования образами объектов понятий к оперированию элементами содержания понятия. Главной идеей этого подхода является предоставление учащимся наглядной опоры логических действий:

1) синтеза образа геометрической конструкции, заданной условием теоремы (задачи);

2) преобразования исходного образа геометрической конструкции (выявление скрытых отношений, введение дополнительных построений, изменение взаимного положения частей конструкции);

3) выделение части геометрической конструкции для подведения ее под новое понятие;

4) выделение набора элементов геометрической конструкции, свойства которых являются посылкой логического вывода;

5) конструирование последовательности сменяющих друг друга образов для иллюстрации процесса перехода к пределу.

В рамках этого подхода динамический чертеж выступает средством визуальной опоры логических действий, совершаемых в ходе объяснения экспериментально установленного факта динамической устойчивости свойства геометрической конфигурации. Алгоритм построения такого чертежа в случае проведения конструктивного доказательства совпадает с алгоритмом построения динамического чертежа для целей компьютерного эксперимента. В остальных случаях он может быть принципиально иным.

Изменение методики работы с теоремой на каждом из представленных этапов проявляется в дополнении описания доказательства утверждения все новыми смысловыми частями: описание хода эксперимента и выводов; описание алгоритма построения динамического чертежа и его обоснование; логическое объяснение выводов эксперимента.

Рассмотрим особенности описания этих смысловых частей на примере оформления решения задачи: «Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой».

Решение данной задачи с использованием ИГС требует предварительной параметризации ее условия: «Докажите, что при любом значении угла между прямыми, биссектрисы образова-

ных ими вертикальных углов лежат на одной прямой».

Дано: $\angle AOC$, $\angle DOB$ – вертикальные углы ($AB \cap CD = O$),

$\angle AOC = \angle DOB = \alpha$, где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ (неразвернутые углы).

OF – биссектриса $\angle AOC$, OE – биссектриса $\angle DOB$ (рис. 3).

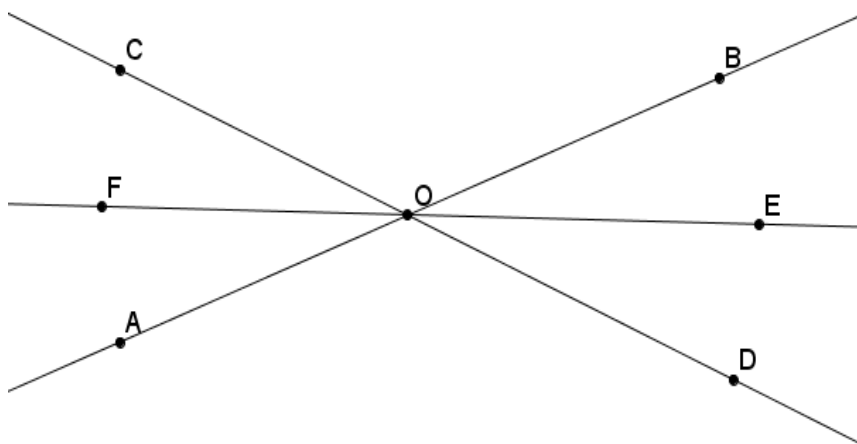




Рис. 3

Доказать: OF и OE лежат на одной прямой (то есть $\angle FOE = 180^\circ$).

Доказательство:

I. Построение динамического чертежа и его обоснование:


1. Построим прямую a (A, B) (с помощью инструмента  прямая по двум точкам) (аксиома задания прямой).


2. Построим точку C на прямой a между точками A и B (инструмент точка ). Переименуем ее в O (с помощью инструмента объект – специальные свойства – переименовать) (аксиома порядка).

3. Построим прямую b (O, C). Отметим на ней точку D (аксиомы задания прямой и принадлежности).

Построенные углы $\angle AOC$, $\angle DOB$ – вертикальные (по определению).

4. Построим биссектрисы OF и OE углов $\angle AOC$ и $\angle DOB$ соответственно (инструмент

 биссектриса угла) (по определению биссектрисы угла).

5. Зададим измерение углов $\angle AOC$, $\angle DOB$ и $\angle FOE$ с помощью инструмента  угол (по аксиоме измерения и свойству вертикальных углов).

II. Компьютерный эксперимент:

Цель эксперимента – проверка динамической устойчивости свойства $\angle FOE = 180^\circ$ при изменении $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ход эксперимента:

1. Передвигаем ползунок так, чтобы величина угла α изменялась от 0° до 180° .

2. Следим за изменением/сохранением величины $\angle FOE$ – угла между биссектрисами. Она остается равной 180° на протяжении всего хода эксперимента.

Вывод: Эксперимент подтвердил справедливость утверждения.

III. Логическое доказательство (объяснение):

$$1. \quad \angle BOE = \angle DOE = \frac{1}{2} \angle DOB = \frac{1}{2} \alpha \quad \text{и}$$

$$\angle COF = \angle AOF = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \alpha \quad (\text{по свойству}$$

вертикальных углов и определению биссектрисы угла);

$$2. \quad \angle FOE = \angle COF + \angle COB + \angle BOE = \frac{1}{2} \alpha$$

$$+ \angle COB + \frac{1}{2} \alpha = \alpha$$

$$+ \angle COB = \angle AOC + \angle COB = 180^\circ \quad (\text{по аксиоме}$$

Библиографический список:

1. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений [Текст] / В. А. Далингер. – М. : Просвещение, 2006 – 257 с.

2. Розов, Н. Х. Наглядная планиметрия [Текст] : рабочая тетрадь для 7 класса / Н. Х. Розов, А. Г. Ягола, Т. Ф. Сергеева, И. Н. Сербис. – М., 2009. – 79 с.

3. Розов, Н. Х. Наглядная планиметрия [Текст] : рабочая тетрадь для 8 класса / Н. Х. Розов, А. Г. Ягола, Т. Ф. Сергеева, И. Н. Сербис. – М., 2009. – 75 с.

4. Розов, Н. Х. Наглядная планиметрия [Текст] : рабочая тетрадь для 9 класса / Н. Х. Розов, А. Г. Ягола, Т. Ф. Сергеева, И. Н. Сербис. – М., 2009. – 75 с.

5. Успенский, В. А. Семь размышлений на темы философии математики (Что такое доказательство?) [Текст] / В. А. Успенский // «Закономерности развития современной математики». – М. : Наука, 1987. – С. 106–155.

6. ФГОС: среднее (полное) общее образование [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=6408.org> 07.12.2011

7. Хализев, В. Н., Марков, В. Н. Подход к обеспечению корректности программ [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.swsys.ru/index.php?page=article&id=1196.org> 07.12.2011.

8. Якиманская, И. С. Технология личностно-ориентированного образования [Текст] / И. С. Якиманская. – М. : Сентябрь, 2000. – 173 с.