УДК 512.7

**С. А. Тихомиров, А. П. Ляпин, В. М. Ростов**

## Комбинированный вычислительный метод в сравнительном анализе компонент Хартсхорна и Ведерникова стабильных 2-расслоений на комплексном проективном пространстве

В данной статье мы проводим сравнительный анализ компонент Хартсхорна и Ведерникова стабильных 2-расслоений на $P^3$, доказывая 5 гипотез о размерностях этих компонент с применением комбинированного вычислительного метода.

**Ключевые слова:** векторное расслоение, стабильное расслоение, классы Черна, многообразие модулей.

**S. A. Tikhomirov, A. P. Lyapin, V. M. Rostov**

## The Combined Computing Method in the Comparative Analysis of Hartshorne and Vedernikov's Components of Stable 2-Bundles on Complex Projective Space

In this article we carry out the comparative analysis of Hartshorne and Vedernikov's components of stable 2-bundles on $P^3$, proving 5 conjectures about dimensions of these components with application of the combined computing method.

**Keywords:** a vector bundle, a stable bundle, Chern's classes, variety of moduli.

Описание геометрических свойств пространств модулей стабильных расслоений на алгебраических многообразиях является одним из интенсивно развиваемых направлений современной алгебраической геометрии.

Актуальность этого направления обусловлена как задачами внутри самой алгебраической геометрии, так и многочисленными приложениями в дифференциальной геометрии и топологии, глобальном анализе и теоретической физике.

Одним из ключевых аспектов данной деятельности является поиск компонент в различных пространствах (многообразиях) модулей, нахождение их размерностей, взаимосвязей между ними.

Настоящая работа посвящена доказательству ряда новых важных данных о компонентах Хартсхорна и Ведерникова стабильных расслоений ранга 2 на трехмерном проективном пространстве $P^3$ над полем комплексных чисел C.

Сначала приведем необходимые определения и утверждения (определение спектра см., например, в [2]).

**Теорема 1 (Ведерников – [1], теорема 1).** Многообразие модулей стабильных двумерных векторных расслоений на $P^3$ с $c_1 = 0$ и спектром $0^l 1^l \ldots (k-l+1)^l (k-l+2)^{l-1} \ldots (k-1)^2 k^1$ $(0<l<k+1)$ неприводимо, рационально и неособо размерности

$$M=3lk^2+(14l-4l^2)k+5l^3/3-8l^2+55l/3-4. \tag{1}$$

**Замечание 1 (Ведерников – [1], замечание 1, с. 986).** Легко видеть, что мы получаем компоненту в пространстве модулей стабильных 2-расслоений на $P^3$ с $c_1 = 0$ и $c_2=2kl+2l-l^2$.

**Определение 1.** Компоненты, размерность которых находится по формуле (1), мы будем называть *компонентами 1 Ведерникова*.

**Теорема 2 (Ведерников – [1], теорема 2).** Многообразие модулей стабильных двумерных векторных расслоений на $P^3$ с $c_1 = 0$ и спектром $0^{k-2l+1} \ldots (l-2)^{k-l-1} (l-1)^{k-l} l^{k-l+1} \ldots (k-1)^2 k^1$ $(0<2l<k+1)$ неприводимо, рационально и неособо размерности

$$M=2k^3/3+6k^2+(2l^2+52/3)k-4l^3-6l^2-11l+8. \tag{2}$$

**Замечание 2 (Ведерников – [1], замечание 1, с. 994).** Легко видеть, что мы получаем компоненту в пространстве модулей стабильных 2-расслоений на $P^3$ с $c_1 = 0$ и $c_2=(k+1)^2-2l^2$.

**Определение 2.** Компоненты, размерность которых находится по формуле (2), мы будем называть *компонентами 2 Ведерникова*.

**Теорема 3 (Хартсхорн – [2], теорема 9.9).** Многообразие модулей стабильных двумерных векторных расслоений на $P^3$ с $c_1=0$ и максимальным спектром образует неприводимую, рациональную и неособую компоненту в пространстве модулей стабильных 2-расслоений на $P^3$ с $c_1 = 0$ и $c_2=2m-1$ размерности 5, если m=1, и размерности

$$M=3m^2+4m+1, \qquad (3)$$

если m больше либо равно 2.

**Определение 3.** Компоненты, размерность которых находится по формуле (3), мы будем называть *компонентами Хартсхорна.*

Теперь, воспользовавшись формулами (1), (2) и (3), мы можем вычислить размерности некоторого количества интересующих нас компонент. Результаты наших вычислений представим в следующих трех таблицах.

| Ведерников, теорема 1 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *l* | *k* | *M* | $c_2$ | $8c_2$-3 |
| 1 | 1 | 21 | 3 | 21 |
| 1 | 2 | 40 | 5 | 37 |
| 1 | 3 | 65 | 7 | 53 |
| 1 | 4 | 96 | 9 | 69 |
| 1 | 5 | 133 | 11 | 85 |
| 1 | 6 | 176 | 13 | 101 |
| 1 | 7 | 225 | 15 | 117 |
| 1 | 8 | 280 | 17 | 133 |
| 1 | 9 | 341 | 19 | 149 |
| 2 | 2 | 62 | 8 | 61 |
| 2 | 3 | 104 | 12 | 93 |
| 2 | 4 | 158 | 16 | 125 |

| Ведерников, теорема 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *l* | *k* | *M* | $c_2$ | $8c_2$-3 |
| 1 | 2 | 55 | 7 | 53 |
| 1 | 3 | 117 | 14 | 109 |
| 2 | 4 | 170 | 17 | 133 |

| Хартсхорн, теорема 3 | | | |
|---|---|---|---|
| *m* | *M* | $c_2$ | $8c_2$-3 |
| 1 | 5 | 1 | 5 |
| 2 | 21 | 3 | 21 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 40 | 5 | 37 |
| 4 | 65 | 7 | 53 |
| 5 | 96 | 9 | 69 |
| 6 | 133 | 11 | 85 |
| 7 | 176 | 13 | 101 |
| 8 | 225 | 15 | 117 |
| 9 | 280 | 17 | 133 |
| 10 | 341 | 19 | 149 |

Полученные экспериментальные данные о размерностях компонент Хартсхорна и Ведерникова позволяют выдвинуть следующие гипотезы.

**Гипотеза 1.** Для соответствующих значений $c_2(E)$ размерности компонент Хартсхорна всегда превосходят размерности компонент 1 Ведерникова, исключая случаи, когда данные компоненты совпадают.

**Гипотеза 2.** Для соответствующих значений $c_2(E)$ размерности компонент Хартсхорна всегда превосходят размерности компонент 2 Ведерникова.

**Гипотеза 3.** Для соответствующих значений $c_2(E)$ размерности компонент 1 Ведерникова всегда превосходят правильные, исключая 1 случай, когда данные размерности совпадают.

**Гипотеза 4.** Для соответствующих значений $c_2(E)$ размерности компонент 2 Ведерникова всегда превосходят правильные.

**Гипотеза 5.** Для соответствующих значений $c_2(E)$ размерности компонент Хартсхорна всегда превосходят правильные, исключая 1 случай, когда данные размерности совпадают.

Для удобства работы воспользуемся широко известным, популярным пакетом Maple 7, а также сервисом онлайн-построения графиков www.yotx.ru. Напомним, что правильной размерностью называется число $8c_2(E)-3$ (см., например, [2]).

**Доказательство гипотезы 1.** Составим и проанализируем разность между размерностями $\mu_{1B}$ и $\mu_X$ компонент 1 Ведерникова и компонент Хартсхорна, указанными в формулах (1) и (3) соответственно:

$$c_2(E)=2m-1=2kl+2l-l^2 \Rightarrow m=\frac{2kl+2l-l^2+1}{2} \Rightarrow \mu_X=3m^2+4m+1=3(kl+l-\frac{l^2}{2}+\frac{1}{2})^2$$

$$+4kl+4l-2l^2+3 \Rightarrow \mu_{1B}-\mu_X=3lk^2+(14l-4l^2)k+\frac{5}{3}l^3-8l^2+\frac{55}{3}l-4-3$$

$$(kl+l-\frac{l^2}{2}+\frac{1}{2})^2-4kl-4l+2l^2-3.$$

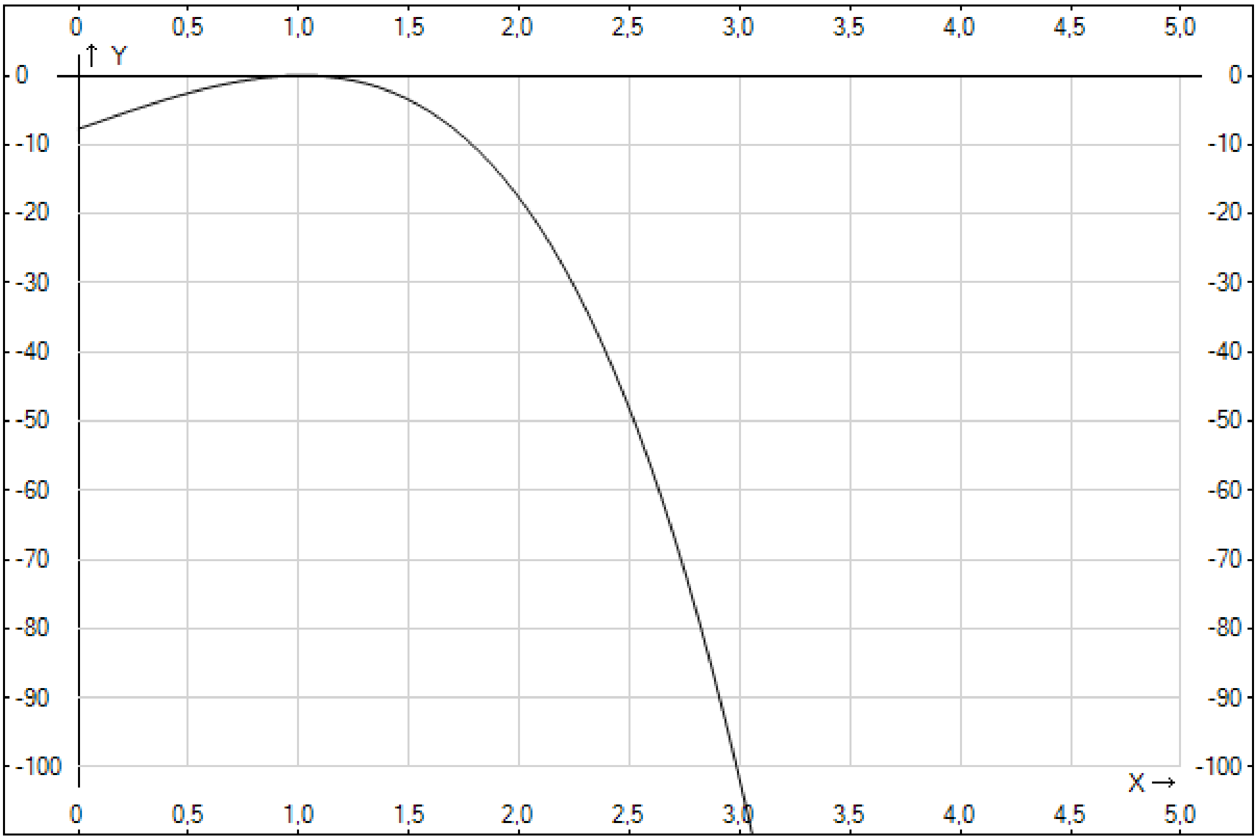
Раскрывая скобки и делая подстановку

$$k=l+p\,,\ p\geq 0\,, \tag{4}$$

получаем

$$\mu_{1B}-\mu_X=-4l^2p-3l^3p+7lp+3lp^2-3l^2p^2-\frac{3}{4}l^4-\frac{7}{3}l^3-\frac{1}{2}l^2+\frac{34}{3}l-\frac{31}{4}.$$

Нетрудно видеть, что при $l=1$ первые 5 слагаемых полученного выражения дают 0, а при $l \geq 2$ и любом $p$, удовлетворяющих (4), дают отрицательное число. С другой стороны, график функции, представляющей собой оставшиеся 5 слагаемых полученного выражения, имеет вид (ось абсцисс в данном случае – ось значений $l$):




Откуда мы легко получаем, что при $l=1$ слагаемые второй половины нашего выражения дают 0, а при $l \geq 2$ дают отрицательные значения. Таким образом, при $l=1$ размерности компонент 1 Ведерникова и Хартсхорна совпадают (то есть просто совпадают сами компоненты), в остальных случаях размерности компонент Хартсхорна выше.

**Доказательство гипотезы 2.** Составим и проанализируем разность между размерностями $\mu_{2B}$ и $\mu_X$ компонент 2 Ведерникова и компонент Хартсхорна, указанными в формулах (2) и (3) соответственно:

$$c_2(E)=2m-1=(k+1)^2-2l^2 \Rightarrow m=\frac{(k+1)^2-2l^2+1}{2} \Rightarrow \mu_X=3m^2+4m+1=\frac{3((k+1)^2-2l^2+1)^2}{4}+$$

$$2((k+1)^2-2l^2+1)+1 \Rightarrow \mu_{2B}-\mu_X=\frac{2}{3}k^3+6k^2+(2l^2+\frac{52}{3})k-4l^3-6l^2-11l+8-$$

$$\frac{3((k+1)^2-2l^2+1)^2}{4}-2((k+1)^2-2l^2+1)-1.$$

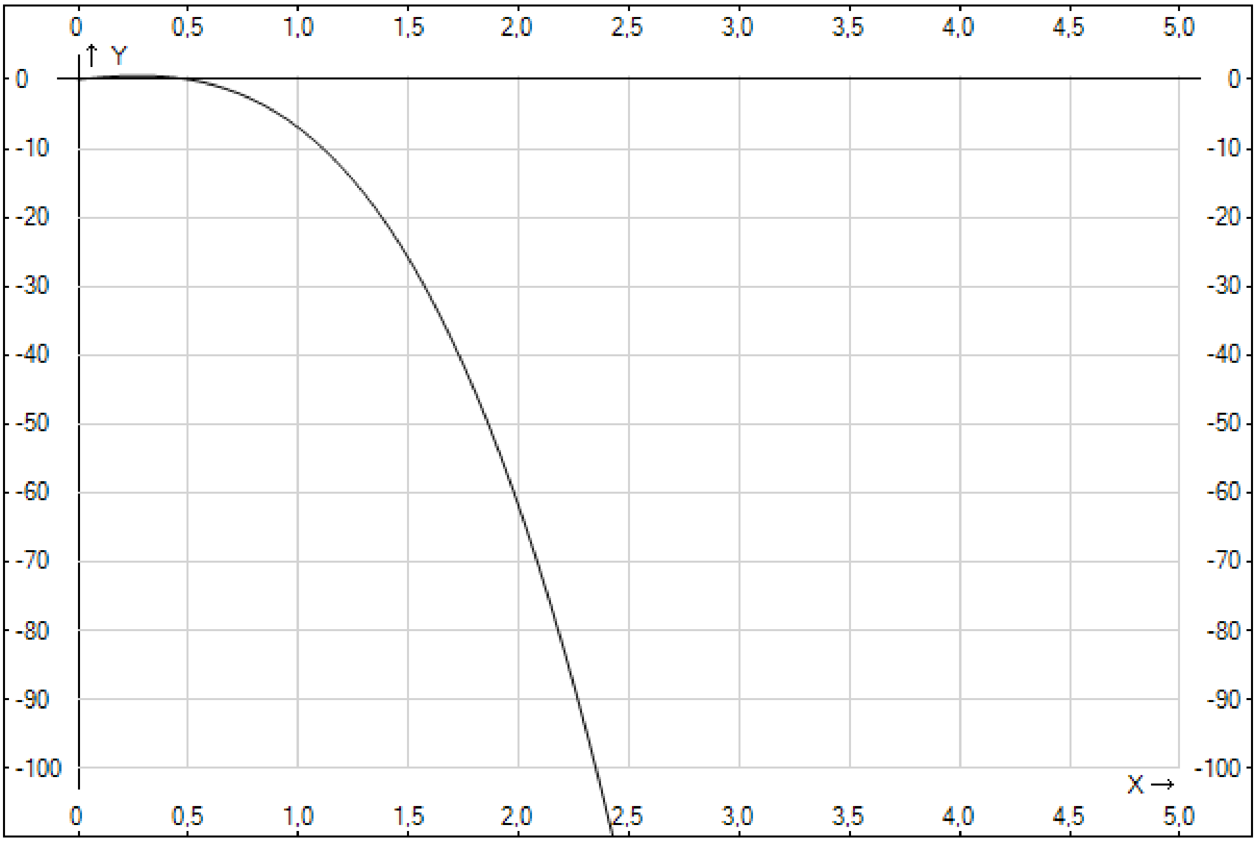
Раскрывая скобки и делая подстановку

$$k=2l+p,\ p\geq 0, \quad (5)$$

получаем

$$\mu_{2B}-\mu_X=\frac{22}{3}p-8lp-3l^4-\frac{3}{4}p^4-\frac{7}{3}p^3-12l^3p-2p^2-15l^2p^2-20l^2p-6lp^3-14lp^2+\frac{11}{3}l-4l^2-\frac{20}{3}l^3.$$

Нетрудно видеть, что первые 11 слагаемых полученного выражения дают при любых $l$ и $p$, удовлетворяющих (5), отрицательное число. С другой стороны, график функции, представляющей собой оставшиеся 3 слагаемых полученного выражения, имеет вид (ось абсцисс в данном случае – ось значений $l$):




Откуда мы легко получаем, что при $l \geq 1$ последние 3 слагаемых нашего выражения дают отрицательные значения. Таким образом, размерности компонент Хартсхорна всегда выше размерностей компонент 2 Ведерникова.

**Доказательство гипотезы 3.** Составим и проанализируем разность между размерностями $\mu_{1B}$ компонент 1 Ведерникова, указанными в формуле (1), и правильными размерностями $\mu_{np}$:

$$c_2(E)=2kl+2l-l^2 \Rightarrow \mu_{np}=8c_2(E)-3=16kl+16l-8l^2-3$$

$$\Rightarrow \mu_{1B}-\mu_{np}=3lk^2+(14l-4l^2)k+\frac{5}{3}l^3-8l^2+\frac{55}{3}l-4-16kl-16l+8l^2+3.$$

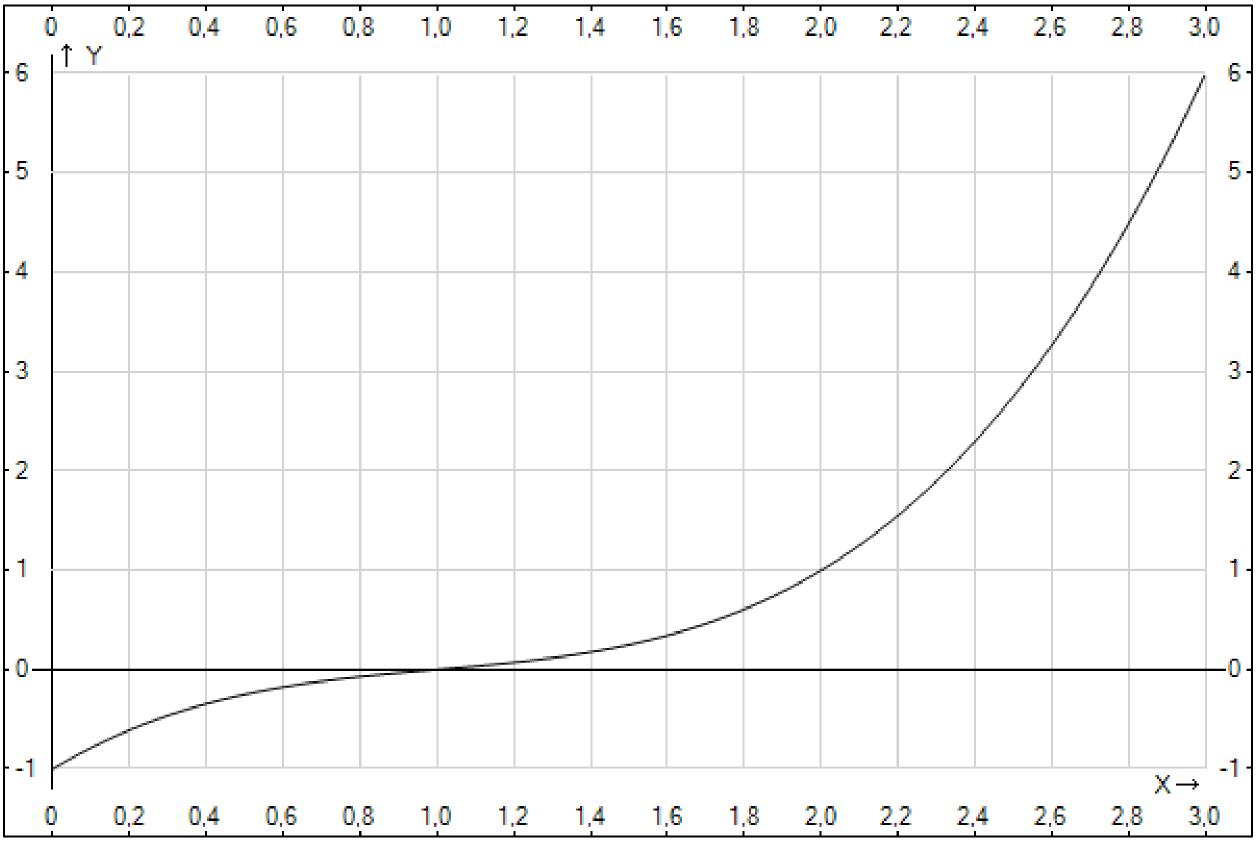
Раскрывая скобки и делая подстановку

$$k=l+p,\ p\geq 0, \tag{6}$$

получаем

$$\mu_{1B} - \mu_{np} = 2l^2 p + 3lp^2 - 2lp + \frac{2}{3}l^3 - 2l^2 + \frac{7}{3}l - 1.$$

Нетрудно видеть, что при $p = 0$ первые 3 слагаемых полученного выражения дают 0, а при любом $l$ и $p \geq 1$, удовлетворяющих (6), дают положительное число. С другой стороны, график функции, представляющей собой оставшиеся 4 слагаемых полученного выражения, имеет вид (ось абсцисс в данном случае – ось значений $l$):




Откуда мы легко получаем, что при $l = 1$ последние 4 слагаемых нашего выражения дают 0, а при $l \geq 2$ дают положительные значения. Таким образом, при $l = 1$ и $p = 0$ (то есть $k = 1$) размерность компоненты 1 Ведерникова равна правильной, в остальных случаях размерности компонент 1 Ведерникова выше правильных.

**Доказательство гипотезы 4.** Составим и проанализируем разность между размерностями $\mu_{2B}$ компонент 2 Ведерникова, указанными в формуле (2), и правильными размерностями $\mu_{np}$:

$$c_2(E) = (k+1)^2 - 2l^2 \Rightarrow \mu_{np} = 8c_2(E) - 3 = 8((k+1)^2 - 2l^2) - 3$$

$$\Rightarrow \mu_{2B} - \mu_X = \frac{2}{3}k^3 + 6k^2 + (2l^2 + \frac{52}{3})k - 4l^3 - 6l^2 - 11l + 8 - 8((k+1)^2 - 2l^2) + 3.$$

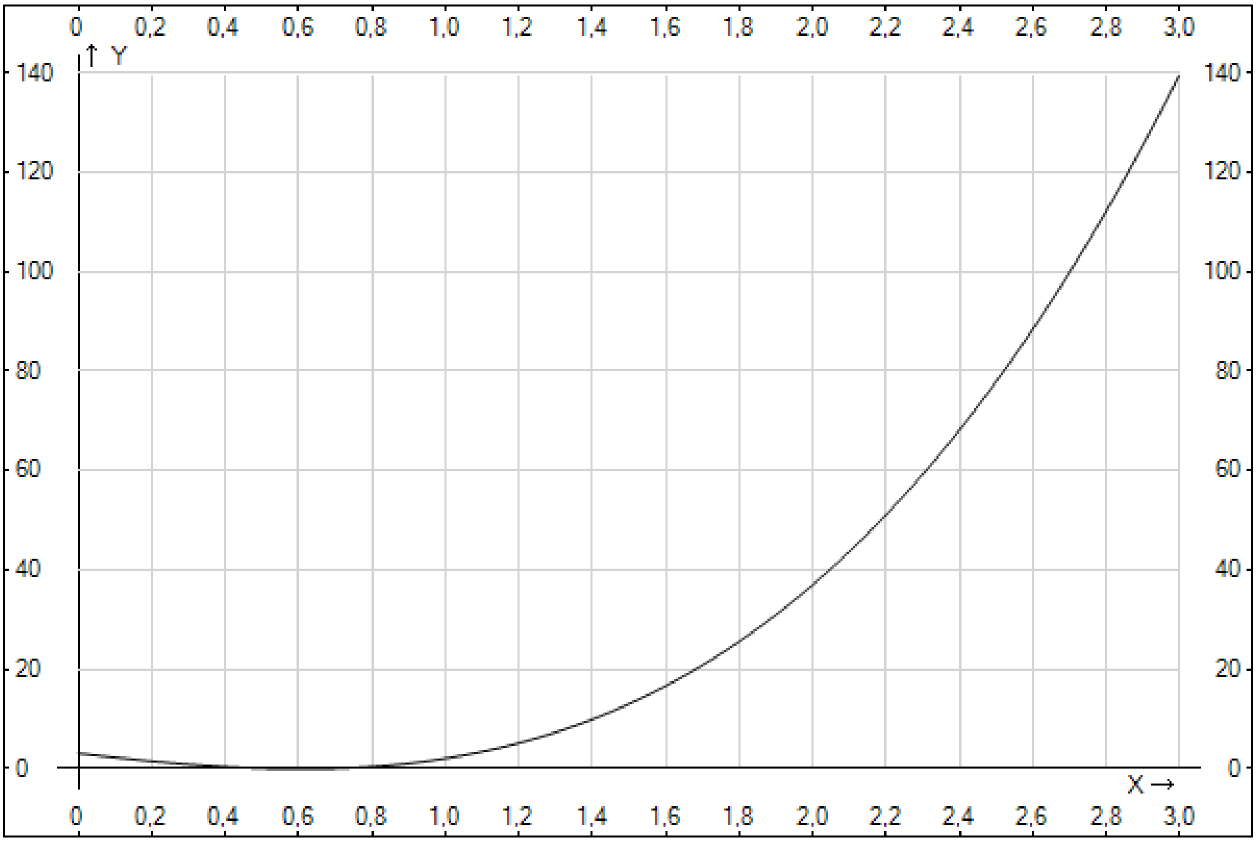
Раскрывая скобки и делая подстановку

$$k = l + p\,,\; p \ge 0\,, \tag{7}$$

получаем

$$\mu_{2B} - \mu_{np} = 10l^2 p - 8lp + 4lp^2 - 2p^2 + \frac{4}{3}p + \frac{2}{3}p^3 + \frac{16}{3}l^3 + 2l^2 - \frac{25}{3}l + 3.$$

Нетрудно видеть, что при $p = 0$ первые 6 слагаемых полученного выражения дают 0, а при любом $l$ и $p \ge 1$, удовлетворяющих (7), дают положительное число. С другой стороны, график функции, представляющей собой оставшиеся 4 слагаемых полученного выражения, имеет вид (ось абсцисс в данном случае – ось значений $l$):



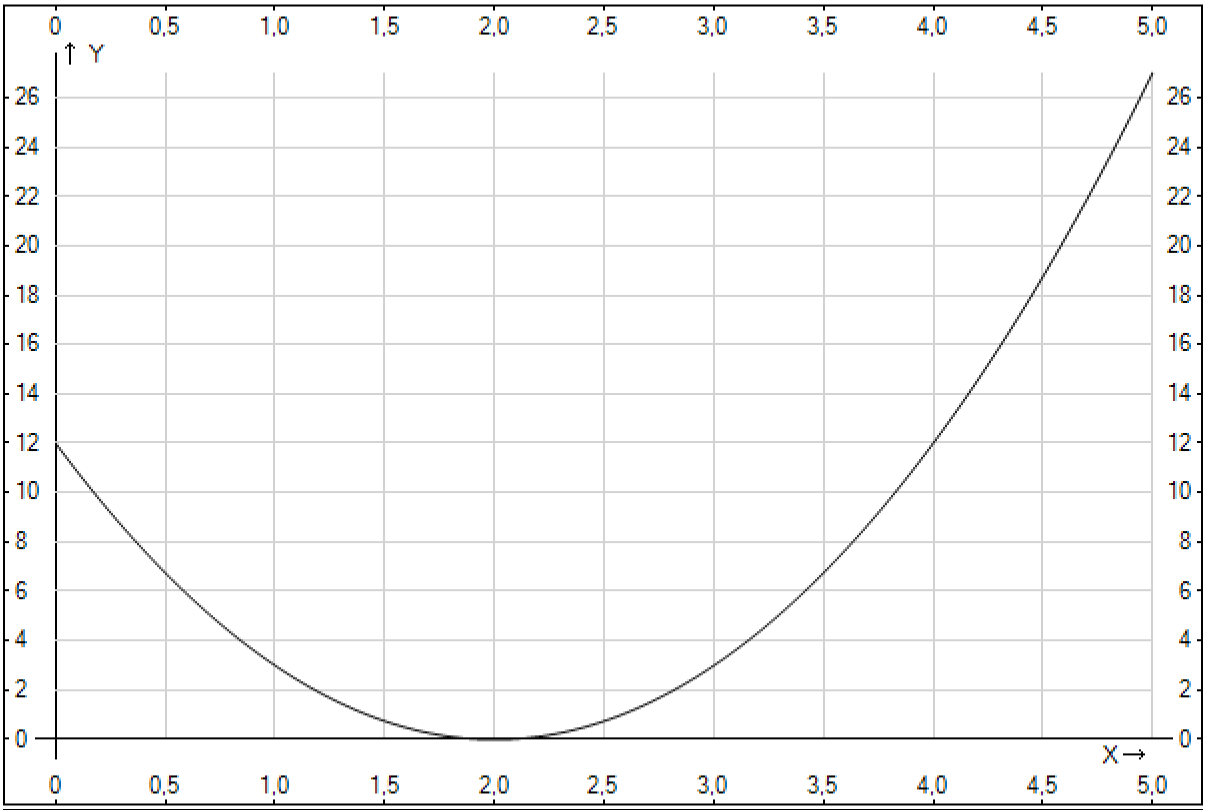

Откуда мы легко получаем, что при $l \ge 1$ последние 4 слагаемых нашего выражения дают положительные значения. Таким образом, размерности компонент 2 Ведерникова всегда выше правильных.

**Доказательство гипотезы 5.** Составим и проанализируем разность между размерностями $\mu_X$ компонент Хартсхорна, указанными в формуле (3), и правильными размерностями $\mu_{np}$:

$$c_2(E) = 2m - 1 \Rightarrow 8c_2(E) - 3 = 16m - 11 \Rightarrow$$

$$\mu_X - \mu_{np} = 3m^2 + 4m + 1 - 16m + 11 = 3m^2 - 12m + 12\,.$$

График полученного выражения имеет вид (ось абсцисс – ось значений $m$):




Таким образом, при $m = 2$ размерность компоненты Хартсхорна равна правильной, в остальных случаях размерности компонент Хартсхорна выше правильных.

**Библиографический список**


1. Ведерников, В. К. Модули стабильных векторных расслоений ранга 2 на $P_3$ с фиксированным спектром [Текст] / В. К. Ведерников // Известия РАН. Серия математическая. – 1984. – Т. 48, № 5. – С. 986–998.
2. Hartshorne, R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.


**Bibliograficheskiy spisok**


1. Vedernikov, V. K. Moduli stabil'ny'h vektorny'h rassloyeniy ranga 2 na $P_3$ s fiksirovanny'm spektrom [Tekst] / V. K. Vedernikov // Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya. – 1984. – T. 48, № 5. – C. 986–998.
2. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 254 (1980), 121–176.