

М. Е. Сорокина

Конструкция компоненты схемы модулей $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на пространстве P^3

В настоящей статье построена неприводимая компонента ожидаемой размерности 29 схемы модулей $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ стабильных (по Гизекеру) рефлексивных пучков ранга 2 с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$ в проективном пространстве P^3 , откуда следует непустота схемы $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ и ее приведенность в общей точке компоненты M .

Ключевые слова: схема модулей, стабильный рефлексивный пучок ранга два в проективном пространстве P^3 .

М. Е. Sorokina

Construction of a component of the moduli space $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ of stable rank two reflexive sheaves on the projective space P^3

In this article we construct an irreducible component M , having the expected dimension 29, of the moduli space $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ of Gieseker-stable rank two reflexive sheaves with Chern classes $c_1 = 0$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$ on the projective space P^3 . This implies that the moduli space $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ is nonempty and reduced at a general point of M .

Keywords: moduli space, stable rank two reflexive sheaf, projective space P^3 .

Мы работаем над произвольным алгебраически замкнутым полем k характеристики 0. В настоящей работе мы начинаем изучение геометрии схемы $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ модулей стабильных (по Гизекеру) рефлексивных пучков ранга 2 с классами Чженя $c_1 = 0$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$ в проективном пространстве P^3 . А именно, доказываем непустоту схемы $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$. Для этого мы опираемся на работу [2].

Идея, предложенная в [2], заключается в использовании конструкции Серра, которая устанавливает связь между рефлексивными пучками E ранга 2 на P^3 и дробно-каноническими кривыми Козна-Маколея Y в P^3 . По этой конструкции пучок E строится как расширение вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow E \rightarrow I_Y(c_1) \rightarrow 0,$$

где I_Y – пучок идеалов схемы Y , $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{P^3}$, $c_1 = c_1(E)$ (см. [2]). Используя данное соответствие, можно строить (полу)стабильные рефлексивные пучки на P^3 . Примеры таких построений приведены в [2].

В частности, используя конструкцию Серра и другие результаты из [2], М.-Ч. Чанг в работе [1] рассмотрела случай стабильных пучков ранга 2 на P^3 с $c_2 \leq 3$. Она доказала, что соответствующие многообразия модулей при $c_2 < 3$ неприводимы, неособы и рациональны, а при $c_2 = 3$ и $c_3 = 1, \dots, 8$ неприводимы, унирациональны, а для некоторых из этих c_3 рациональны. Точные описания многообразий модулей полустабильных пучков ранга 2 на P^3 со вторым классом Чженя $c_2 \geq 4$ до сих пор не были получены.

В настоящей статье мы применяем конструкцию Серра к построению неприводимой компоненты M ожидаемой размерности 29 схемы модулей $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$. Отсюда следует непустота схемы $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ и ее приведенность в общей точке компоненты M .

Пусть $Y := C_1 \sqcup C_2 \sqcup l$ – подсхема в проективном пространстве P^3 , являющаяся дизъюнктивным объединением гладких коник C_1 , C_2 и прямой l . Мы рассматриваем пучки E на P^3 , являющиеся нетривиальными расширениями вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow E \rightarrow I_Y(1) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Такие пучки существуют, поскольку

$\text{Ext}^1(I_Y(1), \mathcal{O}(-1)) \cong H^0(\text{Ext}^1(I_Y(1), \mathcal{O}(-1))) \cong H^0(\text{Ext}^2(\mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}(-1))) \cong H^0(\det N_{Y/P^3}(-2)) \cong H^0(\mathcal{O}_{C_1}(1) \oplus \mathcal{O}_{C_2}(1) \oplus \mathcal{O}_l) \cong H^0(\mathcal{O}_{P^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{P^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{P^1}) \cong k^7$. Классы Чженя пучка E равны $c_1 = 0$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$, и нетрудно видеть, что данный пучок стабилен по Гизекеру, т. е. $[E] \in M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$, где

$M_{P^3}(2; 0,4,4)$ – схема модулей когерентных полустабильных по Гизекеру рефлексивных пучков ранга 2 на P^3 с названными классами Чженя. Таким образом, схема $M_{P^3}(2; 0,4,4)$ непуста.

Вычислим размерность касательного пространства к схеме $M_{P^3}(2; 0,4,4)$ в точке $[E]$.

Применим функтор $\text{Hom}(*, E)$ к точной тройке (1):

$$0 \rightarrow \text{Hom}(I_Y(1), E) \rightarrow \text{Hom}(E, E) \rightarrow \text{Hom}(O(-1), E) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}^1(I_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^1(E, E) \rightarrow \text{Ext}^1(O(-1), E) \rightarrow \dots$$

Здесь $\text{Hom}(I_Y(1), E) = 0$ по стабильности E , $\text{Ext}^1(E, E) = k$ (см. [2]), $\text{Hom}(O(-1), E) = H^0(E(1))$, $\text{Ext}^1(O(-1), E) = H^1(E(1)) = H^1(I_Y(2))$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow I_Y(2) \rightarrow O(2) \rightarrow O_Y(2) \rightarrow 0$$

в силу того, что $H^0(I_Y(2)) = 0$ по определению схемы Y , $H^0(O(2)) = k^{10}$, $H^0(O_Y(2)) = H^0(O_{C_1}(2) \oplus O_{C_2}(2) \oplus O_l(2)) \cong H^0(O_{P^1}(4) \oplus O_{P^1}(4) \oplus O_{P^1}(2)) = k^{13}$, получаем $H^1(I_Y(2)) = k^3$.

Кроме того, равенство $H^0(I_Y(2)) = 0$ дает нам, что $H^0(E(1)) = k$. Тем самым, получаем следующую точную слева последовательность:

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(I_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^1(E, E) \rightarrow k^3 \rightarrow \dots \quad (2)$$

Вычислим $\text{Ext}^1(I_Y(1), E)$. Для этого рассмотрим длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\text{Hom}(I_Y(1), E)) \rightarrow \text{Ext}^1(I_Y(1), E) \rightarrow \\ \rightarrow H^0(\text{Ext}^1(I_Y(1), E)) \rightarrow H^2(\text{Hom}(I_Y(1), E)) \rightarrow \dots \quad (3)$$

Имеем: $\text{Hom}(I_Y(1), E) \cong E(-1)$, откуда $H^1(\text{Hom}(I_Y(1), E)) = k^2$ и $H^2(\text{Hom}(I_Y(1), E)) = 0$. Пучок $\text{Ext}^1(I_Y(1), E)$ включается в точную последовательность

$$0 \rightarrow E(-1) \rightarrow \text{Hom}(I_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^1(O_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^1(O(1), E) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}^1(I_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^2(O_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^2(O(1), E), \quad (4)$$

которая получается применением функтора $\text{Hom}(*, E)$ к точной тройке $0 \rightarrow I_Y(1) \rightarrow O(1) \rightarrow O_Y(1) \rightarrow 0$. Из (4) следует изоморфизм

$$\text{Ext}^1(I_Y(1), E) \cong \text{Ext}^2(O_Y(1), E). \quad (5)$$

Применим функтор $\text{Hom}(O_Y(1), *)$ к тройке (1):

$$\text{Ext}^1(O_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^1(O_Y(1), I_Y(1)) \rightarrow \text{Ext}^2(O_Y(1), O(-1)) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}^2(O_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^2(O_Y(1), I_Y(1)) \rightarrow \text{Ext}^3(O_Y(1), O(-1)). \quad (6)$$

$\text{Ext}^1(O_Y(1), E) = 0$, как видно из точной тройки

$$0 \rightarrow \text{Hom}(O(1), E) \rightarrow \text{Hom}(I_Y(1), E) \rightarrow \text{Ext}^1(O_Y(1), E) \rightarrow 0,$$

в которой $\text{Hom}(O(1), E) \cong \text{Hom}(I_Y(1), E) \cong E(-1)$. Далее, $\text{Ext}^1(O_Y(1), I_Y(1)) = \text{Ext}^1(O_Y, I_Y)$ включается в точную тройку

$$0 \rightarrow \text{Hom}(O_Y, O_Y) \rightarrow \text{Ext}^1(O_Y, I_Y) \rightarrow \text{Ext}^1(O_Y, O),$$

где $\text{Ext}^1(O_Y, O) = 0$, $\text{Hom}(O_Y, O_Y) \cong O_Y$, а значит, $\text{Ext}^1(O_Y, I_Y) \cong O_Y$. Пучок $\text{Ext}^2(O_Y(1), O(-1)) = \text{Ext}^2(O_Y, O) \otimes O(-2)$, как показано выше, изоморфен $O_{C_1}(1) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_l$. Пучок $\text{Ext}^3(O_Y(1), O(-1))$ равен нулю, поскольку $\text{codim}_{P^3} Y = 2$.

Для нахождения пучка $\text{Ext}^2(O_Y(1), I_Y(1)) = \text{Ext}^2(O_Y, I_Y)$ рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(O_Y, O_Y) \rightarrow \text{Ext}^2(O_Y, I_Y) \rightarrow \text{Ext}^2(O_Y, O) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Ext}^2(O_Y, O_Y) \rightarrow \text{Ext}^3(O_Y, I_Y). \quad (7)$$

Здесь $\text{Ext}^1(O_Y, O_Y) \cong N_{Y/P^3} = N_{C_1/P^3} \oplus N_{C_2/P^3} \oplus N_{l/P^3} = O_{C_1}(1) \oplus O_{C_1}(2) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_{C_2}(2) \oplus 2O_l(1)$, $\text{Ext}^2(O_Y, O) \cong O_{C_1}(3) \oplus O_{C_2}(3) \oplus O_l(2)$. Для пучка $\text{Ext}^2(O_Y, O_Y)$ верно равенство

$$\text{Ext}^2(O_Y, O_Y) = \text{Ext}^2(O_{C_1}, O_{C_1}) \oplus \text{Ext}^2(O_{C_2}, O_{C_2}) \oplus \text{Ext}^2(O_l, O_l).$$

Имеем: $\text{Ext}^2(O_{C_1}, O_{C_1}) \cong \text{Ext}^1(I_{C_1}, O_{C_1})$. Пучок идеалов I_C коники C в P^3 имеет локально свободную резольвенту

$$0 \rightarrow O(-3) \rightarrow O(-2) \oplus O(-1) \rightarrow I_C \rightarrow 0. \quad (8)$$

Применяя к тройке (8) функтор $\text{Hom}(*, O_C)$, получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(I_C, O_C) \rightarrow O_C(1) \oplus O_C(2) \rightarrow O_C(3) \rightarrow \text{Ext}^1(I_C, O_C) \rightarrow 0,$$

в которой $\text{Hom}(I_C, O_C) \cong N_{C/P^3} \cong O_C(1) \oplus O_C(2)$, а тем самым, $\text{Ext}^1(I_C, O_C) \cong O_C(3)$. Аналогично, применяя локально свободную резольвенту

$$0 \rightarrow O(-2) \rightarrow 2O(-1) \rightarrow I_l \rightarrow 0$$

для пучка идеалов I_l прямой l в P^3 , получим, что $\text{Ext}^2(O_l, O_l) \cong \text{Ext}^1(I_l, O_l) \cong O_l(2)$. Таким образом, $\text{Ext}^2(O_Y, O_Y) \cong O_{C_1}(3) \oplus O_{C_2}(3) \oplus O_l(2)$. Далее, $\text{Ext}^3(O_Y, I_Y) \cong \text{Ext}^3(O_{C_1}, I_Y) \oplus \text{Ext}^3(O_{C_2}, I_Y) \oplus \text{Ext}^3(O_l, I_Y)$. Для нахождения пучка $\text{Ext}^3(O_{C_1}, I_Y)$ воспользуемся точной тройкой

$$0 \rightarrow I_Y \rightarrow I_{C_1} \rightarrow O_{C_2} \oplus O_l \rightarrow 0.$$

Применяя к ней функтор $\text{Hom}(O_Y, *)$, получим точную последовательность

$$\text{Ext}^2(O_{C_1}, O_{C_2} \oplus O_l) \rightarrow \text{Ext}^3(O_{C_1}, I_Y) \rightarrow \text{Ext}^3(O_{C_1}, I_{C_1}),$$

в которой $\text{Ext}^2(O_{C_1}, O_{C_2} \oplus O_l) = 0$ и $\text{Ext}^3(O_{C_1}, I_{C_1}) = 0$, поскольку $\text{hd}(I_{C_1}) = 1$. Но тогда $\text{Ext}^3(O_{C_1}, I_Y) = 0$, а следовательно, и $\text{Ext}^3(O_Y, I_Y) = 0$.

Подставим все найденные результаты в (7):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow O_{C_1}(1) \oplus O_{C_1}(2) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_{C_2}(2) \oplus 2O_l(1) &\rightarrow \text{Ext}^2(O_Y, I_Y) \rightarrow \\ &\rightarrow O_{C_1}(3) \oplus O_{C_2}(3) \oplus O_l(2) \rightarrow O_{C_1}(3) \oplus O_{C_2}(3) \oplus O_l(2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\text{Ext}^2(O_Y, I_Y) \cong O_{C_1}(1) \oplus O_{C_1}(2) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_{C_2}(2) \oplus 2O_l(1).$$

Подставляем последнее равенство и формулы $\text{Ext}^1(O_Y(1), E) = 0$, $\text{Ext}^1(O_Y(1), I_Y(1)) = O_Y$, $\text{Ext}^2(O_Y(1), O(-1)) = O_{C_1}(1) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_l$, $\text{Ext}^3(O_Y(1), O(-1)) = 0$ в (6):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow O_Y \rightarrow O_{C_1}(1) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_l &\rightarrow \text{Ext}^2(O_Y(1), E) \rightarrow \\ &\rightarrow O_{C_1}(1) \oplus O_{C_1}(2) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_{C_2}(2) \oplus 2O_l(1) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\text{Ext}^2(O_Y(1), E) \cong O_{C_1}(1) \oplus O_{C_1}(2) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_{C_2}(2) \oplus 2O_l(1) \oplus O_Z$, где $Z = \text{Supp}(\text{coker}(O_Y \rightarrow O_{C_1}(1) \oplus O_{C_2}(1) \oplus O_l))$ – нульмерная схема длины 4 в P^3 . Тем самым,

$$H^0(\text{Ext}^2(O_Y(1), E)) = k^{24}.$$

Отсюда и из (5) и (3) получаем, что $\text{Ext}^1(I_Y(1), E) = k^{26}$, а значит, в силу (2)

$$\dim \text{Ext}^1(E, E) \leq 29.$$

С другой стороны, согласно [2], $\dim \text{Ext}^1(E, E) - \dim \text{Ext}^2(E, E) = 8c_2(E) - 3 = 29$. Из двух последних формул следует, что

$$\text{Ext}^1(E, E) = k^{29}, \quad \text{Ext}^2(E, E) = 0. \quad (9)$$

Так как пучок E стабилен, то $T_{[E]}M_{P^3}(2; 0, 4, 4) = \text{Ext}^1(E, E)$. Отсюда и из (9) по теории деформации следует, что схема $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ неособа в точке $[E]$ и имеет в этой точке размерность 29. Тем самым, неприводимая компонента M схемы $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$, содержащая точку $[E]$, имеет размерность 29, ожидаемую по теории деформации, и схема $M_{P^3}(2; 0, 4, 4)$ приведена в общей точке компоненты M .

Библиографический список

1. Chang M.-C. Stable rank 2 reflexive sheaves on P^3 with small c_2 and applications// American Math. Soc. 1, July (1984), 57–89.
2. Hartshorne R. Stable Reflexive Sheaves// Math. Ann. (1980), 121–176.

Bibliograficheskij spisok

1. Chang M.-C. Stable rank 2 reflexive sheaves on P^3 with small c_2 and applications// American Math. Soc. 1, July (1984), 57–89.
2. Hartshorne R. Stable Reflexive Sheaves// Math. Ann. (1980), 121–176.