УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

О рождении устойчивой замкнутой траектории из гомоклинической траектории седла кусочно-гладкого векторного поля

Даны условия рождения устойчивой замкнутой траектории из гомоклинической траектории седла кусочно-гладкого векторного поля, содержащей дуги на поверхности скользящих движений.

Ключевые слова: бифуркации, кусочно-гладкие векторные поля, гомоклиническая траектория, устойчивая замкнутая траектория.

V. Sh. Roitenberg

On the birth of a stable closed trajectory from a homoclinic trajectory of the saddle of a piecewise smooth vector field

Conditions of the birth of a stable closed trajectory from a homoclinic trajectory of the saddle of a piecewise smooth vector field which include arcs on the surface of sliding motions are given.

Keywords: bifurcations, piecewise smooth vector fields, homoclinic trajectory, stable closed trajectory.

1. Введение. «Механизмы» возникновения автоколебаний в процессах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с гладкими правыми частями, хорошо известны. Математически они представляют бифуркации рождения устойчивых замкнутых траекторий гладких векторных полей [1]. Аналогичные бифуркации разрывных (кусочно-гладких) векторных полей изучены хуже. Некоторые локальные бифуркации описаны в книге [7], в основном для случая двумерного фазового пространства. Ряд нелокальных бифуркаций при размерности фазового пространства $n \ge 3$ изучен в работах автора [3−6].

Л. П. Шильниковым в работе [8] было доказано рождение единственной устойчивой замкнутой траектории из гомоклинической (двоякоасимптотической) траектории седла гладкого векторного поля, имеющего характеристические показатели λ_i, такие, что $\operatorname{Re}\lambda_1 \le \ldots \le \operatorname{Re}\lambda_{n-2} < \lambda_{n-1} < 0 < \lambda_n$, $\lambda_{n-1} + \lambda_n < 0$.

Эти результаты, очевидно, переносятся и на кусочно-гладкие векторные поля в случае, когда седло не лежит на поверхности разрыва поля, а гомоклиническая траектория состоит из дуг, трансверсальных поверхности разрыва.

Здесь мы изучим бифуркацию рождения устойчивой замкнутой траектории в трехмерном пространстве из гомоклинической траектории седла, содержащей участки скользящих движений, т. е. лежащие на поверхности разрыва.

2. Кусочно-гладкие векторные поля. Пусть M − компактное трехмерное C^∞-многообразие, D – разбиение M на компактные трехмерные C^∞-подмногообразия M_i, $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, такие, что $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_s$, $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$ при $1 \le i < j \le s$. Если $M_i \cap M_j \ne \varnothing$ при $i \ne j$, то $M_i \cap M_j$ является замкнутым двумерным C^∞-подмногообразием в M.

Кусочно-гладким векторным полем класса на многообразии M с разбиением D назовем элемент банахова пространства

$$\mathrm{X}^r(M, D) := \mathrm{X}^r(M_1) \otimes \mathrm{X}^r(M_2) \otimes \ldots \otimes \mathrm{X}^r(M_s),$$

где $\mathrm{X}^r(M_i)$ – банахово пространство векторных полей класса C^r на M с C^r-топологией ($i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, $r \ge 1$). *Траекториями* поля $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(s)})$ из $\mathrm{X}^r(M, D)$ следуя [7, С. 95] будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{X}(x)$, $x \in M$, где $\hat{X}(x) = \{X^{(i)}(x)\}$ при

$x \in \operatorname{int} M_i$ и $\hat{X}(x)$ − выпуклая оболочка векторов $X^{(i)}(x)$ и $X^{(j)}(x)$ при $x \in M_i \cap M_j \neq \varnothing$, $i \neq j$. Кусочно-гладкое векторное поле $X = (X^{(1)}, ..., X^{(s)}) \in \mathrm{X}^r(M, D)$ можно отождествить с классом векторных полей $X^*: M \to TM$, где $X^*(x) = X^{(i)}(x)$ при $x \in \operatorname{int} M_i$. Векторные поля X^*, вообще говоря, имеют разрывы на поверхностях ∂M_i.

Однопараметрическим семейством кусочно-гладких векторных полей назовем C^r-отображение $(-v, v) \ni \varepsilon \mapsto X_\varepsilon = (X_\varepsilon^{(1)}, ..., X_\varepsilon^{(s)}) \in \mathrm{X}^r(M, D)$, $v > 0$. Будем его обозначать $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<v}$. Так как отображения значений $M_i \times \mathrm{X}^r(M_i) \ni (x, X^{(i)}) \mapsto X^{(i)}(x) \in TM_i$, $i \in \{1, 2, ..., s\}$, принадлежат классу C^r, то и отображения $M_i \times (-v, v) \ni (x, \varepsilon) \mapsto X_\varepsilon^{(i)}(x)$ принадлежат классу C^r.

3. Поверхность скользящих движений. Пусть для кусочно-гладкого векторного поля $X = (X^{(1)}, ..., X^{(s)}) \in \mathrm{X}^r(M, D)$ вектор $X^{(i)}(x^0)$ касается ∂M_i. Будем говорить, что это *простое касание*, если в окрестности U точки x^0 можно выбрать локальные координаты (x_1, x_2, x_3) так, что точка x^0 имеет нулевые координаты, $\partial M_i \cap U$ задается уравнением $x_3 = 0$, при $x \in U$

$$X^{(i)}(x) = P_1(x_1, x_2, x_3)\partial / \partial x_1 + P_2(x_1, x_2, x_3)\partial / \partial x_2 + P_3(x_1, x_2, x_3)\partial / \partial x_3,$$

где $P_3(0) = 0$, $(\partial P_3(0) / \partial x_1)^2 + (\partial P_3(0) / \partial x_2)^2 \neq 0$.

Пусть все точки касания векторных полей $X^{(i)}$, $i \in \{1, 2, ..., s\}$, с ∂M_i − простые. Тогда множество S_{iX}, состоящее из точек $x \in \partial M_i$, в которых вектор $X^{(i)}(x)$ направлен из M_i или касается ∂M_i, является компактным C^r-многообразием с краем $\partial S_{iX} = \{x \in \partial M_i : X^{(i)}(x) \in T_x \partial M_i\}$. Множество $S_X = \bigcup_{i \neq j}(S_{iX} \cap S_{jX}) \setminus (\partial S_{iX} \cap \partial S_{jX})$ является C^r-многообразием с краем. Назовем его *устойчивой поверхностью скользящих движений* поля $X \in \mathrm{X}^r(M, D)$. Для любой точки $x \in S_X$ в $\hat{X}(x)$ имеется единственный вектор $X^S(x) \in T_x S_X$, при этом $X^S(\cdot) \in C^r$. Тем самым, на S_X задано C^r-векторное поле X^S. Дуги траекторий поля X^S (скользящие движения) являются и дугами траекторий поля X.

Обыкновенными точками поля X будем называть точки $x \in \operatorname{int} M_i$ и точки $x \in M_i \cap M_j \neq \varnothing, i \neq j$, в которых векторы $X^{(i)}(x)$ и $X^{(j)}(x)$ не касаются $M_i \cap M_j$ и направлены оба внутрь или M_i или M_j.

4. Гиперболические замкнутые траектории, содержащие участки скользящих движений. Пусть $L: x = \xi(t), t \in \mathbf{R}$, замкнутая (периодическая) траектория поля $X \in \mathrm{X}^r(M, D)$ периода T и существуют числа $t_1 < ... < t_{2m} < t_{2m+1} = t_1 + T$ такие, что дуга $\xi[t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i \in \{1, ..., m\}$, принадлежит S_X и пересекается с ∂S_X в единственной точке $\xi(t_{2i})$, причем это пересечение трансверсально; дуги $\xi(t_{2i}, t_{2i+1})$, $i \in \{1, ..., m\}$ состоят из простых точек. Тогда для любого $i \in \{1, ..., m\}$ определено отображение f_{2i} по траекториям векторного поля X некоторой окрестности l_{2i} точки $\xi(t_{2i})$ на ∂S_X в окрестность точки, принадлежащую $\operatorname{int} S_X$. Это отображение является C^r-вложением. Потребуем, чтобы для любого $i \in \{1, ..., m\}$ оно было трансверсально в точке $\xi(t_{2i+1})$ вектору $X^S(\xi(t_{2i+1}))$. Тогда для любого $i \in \{0, ..., m-1\}$ определен диффеоморфизм f_{2i+1} некоторой окрестности l_{2i+1} точки $\xi(t_{2i+1})$ на дуге $f_{2i}(l_{2i})$ в окрестность точки $\xi(t_{2i+2})$ на ∂S_X по траекториям векторного поля X^S. Теперь в некоторой окрестности точки $p := \xi(t_1)$ на l_1 определено отображение последования по траекториям поля X − локальный диффеоморфизм $f = f_{2m} \circ ... f_2 \circ f_1$, для которого p − неподвижная точка. Если $|f'(p)| < 1$, то L *− устойчивая гиперболическая замкнутая траектория*, с m участками скользящих движений.

5. Формулировка результатов. Рассмотрим однопараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<v}$ класса C^r, $r \geq 2$. Предположим, что векторное поле X_0 удовлетворяет следующим условиям.

C_1) *Для него определена поверхность скользящих движений* S_{X_0}.

C_2) *При некотором* $k_* \in \{1, 2, ..., s\}$ *векторное поле* $X_0^{(k_*)}$ *имеет гиперболическое седло* $z^0 \in \operatorname{int} M_{k_*}$.

C_3) *Характеристические показатели* λ_i^0 *седла* z^0 *таковы, что* $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < 0 < \lambda_3^0$, $\lambda_2^0 + \lambda_3^0 < 0$.

C_4) *Существует траектория* $L : x = \xi(t),\ t \in \mathbf{R}$, α - и ω *-предельная к* z^0, *со следующими свойствами. Для некоторых* $-\infty = t_0 < t_1 < ... < t_{2m} < t_{2m+1} = +\infty$,

а) дуга $\xi(t_{2i}, t_{2i+1})$, $i \in \{0, 1, ..., m\}$, *состоит из обыкновенных точек; б) дуга* $\xi[t_{2i-1}, t_{2i}]$, $i \in \{1, ..., m\}$, *принадлежит* S_{X_0} *и пересекается с* ∂S_{X_0} *в единственной точке* $\xi(t_{2i})$, *причем это пересечение трансверсально; в) пусть* $f_{2i} : l_{2i} \to S_{X_0}$ *– отображение по траекториям векторного поля* X_0 *окрестности* l_{2i} *точки* $\xi(t_{2i})$ *на* ∂S_{X_0} *в окрестность точки* $\xi(t_{2i+1})$, *принадлежащую* $\operatorname{int} S_{X_0}$. *Это отображение является* C^r *-вложением. Потребуем, чтобы для любого* $i \in \{1, ..., m\}$ *дуга* $f_{2i}(l_{2i})$ *была трансверсально в точке* $\xi(t_{2i+1})$ *вектору* $X_0^S(\xi(t_{2i+1}))$; *г) дуга* $\xi(t_{2m}, +\infty)$ *входит в седло по ведущему направлению (одномерному собственному подпространству, соответствующему* λ_2^0*); д) Пересечения дуг положительных полутраекторий поля* X_0, *начинающихся в точках* l_{2m}, *с* $\operatorname{int} M_{k_*}$, *образуют погруженное двумерное подмногообразие в* $\operatorname{int} M_{k_*}$. *Будем предполагать, что оно трансверсально пересекается с устойчивым инвариантным многообразием* $W^s(z^0)$ *седла* z^0.

При достаточно малом $\delta_1 > 0$ для любого $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)$ в окрестности V точки $\xi(t_{2m})$ существуют такие локальные координаты (x_1, x_2, x_3), что точка $\xi(t_{2m})$ имеет при $\varepsilon = 0$ нулевые координаты, $S_{X_\varepsilon} \cap V = \{p \in V : x_3(p) = 0, x_2(p) \ge 0\}$, $\partial S_{X_\varepsilon} \cap V =$ $\partial S_{X_\varepsilon} \cap V = \{p \in V : x_3(p) = x_2(p) = 0\}$, при этом отображения $(p, \varepsilon) \mapsto x_j(p)$, $j = 1, 2, 3$, принадлежат классу C^r.

Вследствие C_2) и C_3) при достаточно малом δ_1 векторное поле $X_\varepsilon^{(k_*)}, |\varepsilon| < \delta_1$, имеет седло $z(\varepsilon)$, где $z(\cdot) \in C^r$, $z(0) = z^0$. При этом для каждого ε мы можем выбрать локальные координаты $(y, \tau) = (y_1, y_2, \tau)$, в которых уравнение $\dot{x} = X_\varepsilon^{(k_*)}(x)$ имеет вид $\dot{y} = (A(\varepsilon) + p(y, \tau, \varepsilon))y$, $\dot{\tau} = (\lambda_3(\varepsilon) + q(y, \tau, \varepsilon))\tau$, где $A(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon))$, $\lambda_j \in C^{r-1}$, $\lambda_J(0) = \lambda_j^0$, $j = 1, 2, 3$, $p, q \in C^{r-1}$, $p(0) = q(0) = 0$. Можно считать, что при $\varepsilon = 0$ направление, по которому L входит в седло, совпадает с положительной полуосью y_2, а положительная полуось τ принадлежит дуге $\xi(-\infty, t_1)$. Пусть

$\Pi_\varepsilon^- := \{p : \tau(p) = d_1,\ y_1^2 + y_2^2 < d_2^2\}$, , $\Pi_\varepsilon^+ := \{p : y_2(p) = d_3,\ |y_1(p)| < d_3,\ |\tau(p)| < d_3\}$,

где $d_j > 0$, $j = 1, 2, 3$. Числа d_j и δ_2 можно выбрать так, что при $|\varepsilon| < \delta_2$ векторное поле $X_\varepsilon^{(k_*)}$ было трансверсально подмногообразиям Π_ε^+ и Π_ε^-. Мы можем также считать, что определен C^r-диффеоморфизм T_ε^3, отображающий Π_ε^- по траекториям поля $X_\varepsilon^{(k_*)}$ на некоторую окрестность точки $\xi(t_1)$ в $\operatorname{int} S_{X_\varepsilon}$. Тогда T_0^3 отображает дугу $y_1 = 0$ в Π_0^- в некоторую дугу $I \subset \operatorname{int} S_{X_0}$. Следующее условие не зависит от произвола в выборе координат (y, τ) и чисел $d_j > 0$.

C_5) *Вектор* $X^S(\xi(t_1))$ *трансверсален дуге* I *в точке* $\xi(t_1)$.

Пусть T_ε^3 отображает точку с координатами $y = 0$, т. е. точку пересечения выходящей сепаратрисы седла $z(\varepsilon)$ с Π_ε^-, в точку $p(\varepsilon)$. Тогда $p(\cdot) \in C^{r-1}$, $p(0) = \xi(t_1)$. Из пунктов а) – в) условия C_4) следует, что при достаточно малом $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ положительная полутраектория поля X_ε, $|\varepsilon| < \delta_2$, начинающаяся в точке $p(\varepsilon)$, пересекает $\partial S_{X_\varepsilon} \cap V$ в точке с координатой $x_1 = \hat{u}(\varepsilon)$, где $\hat{u}(\cdot) \in C^{r-1}$, $\hat{u}(0) = 0$. Обозначим $\eta_\varepsilon(u)$ – точку $\partial S_{X_\varepsilon} \cap V$ с координатой $x_1 = \hat{u}(\varepsilon) + u$. Мы можем считать, что при $|\varepsilon| < \delta_2$ $\eta_\varepsilon(\cdot)$ определена на интервале $(-u_*, u_*)$.

В силу пункта г) условия $C_4)$ и выбора координаты y_2 дуга $\xi(t_{2m},+\infty)$ пересекает Π_ε^+ в точке с координатой $\tau = 0$. При достаточно малых $\bar{u} \in (0, u_*]$ и $\delta_3 \in (0, \delta_2]$ положительная полутраектория поля X_ε, $|\varepsilon| < \delta_3$, начинающаяся в точке $\eta_\varepsilon(u)$, $|u| < \bar{u}$, пересекает Π_ε^+ в точке с координатами $y_1 = \hat{y}_1(u,\varepsilon)$, $\tau = \hat{\tau}(u,\varepsilon)$, где $\hat{y}_1$, и $\hat{\tau}$ – C^{r-1}-функции, $\hat{\tau}(0,0) = 0$. Пусть $T_\varepsilon^1 : l_\varepsilon^1 \to \Pi_\varepsilon^+$ – отображение, ставящее в соответствие точке $\eta_\varepsilon(u)$ точку с координатами $y_1 = \hat{y}_1(u,\varepsilon)$, $\tau = \hat{\tau}(u,\varepsilon)$.

Следующее условие не зависит от выбора координат (y,τ) и чисел d_j.

$C_6)$ *Производная* $\hat{\tau}_\varepsilon'(0,0) \neq 0$.

Без ограничения общности можно считать, что в условии $C_6)$ $\hat{\tau}_\varepsilon'(0,0) > 0$.

Замечание. Можно показать, что векторные поля X_0, удовлетворяющие условиям $C_1) - C_5)$ образуют в $\mathrm{X}^r(M,D)$ погруженное C^1-подмногообразие коразмерности один, а условие $C_6)$ означает трансверсальность семейства $\{X_\varepsilon\}$ в точке $\varepsilon = 0$ этому подмногообразию.

Теорема. *Пусть однопараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей* $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|<\nu}$ *удовлетворяет условиям* $C_1) - C_6)$ *. Тогда существуют такие число* $\delta > 0$ *и окрестность* $U(\Gamma_0)$ *петли* $\Gamma_0 := L \cup \{z^0\}$*, что векторное поле* X_ε *при* $-\delta < \varepsilon \le 0$ *не имеет замкнутых траекторий, принадлежащих* $U(\Gamma_0)$*, а при* $0 < \varepsilon < \delta$ *имеет в* $U(\Gamma_0)$ *единственную замкнутую траекторию* $\Gamma(\varepsilon)$*; эта траектория является устойчивой гиперболической; топологический предел* $\mathop{\mathrm{lt}}\limits_{\varepsilon\to 0} \Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0$.

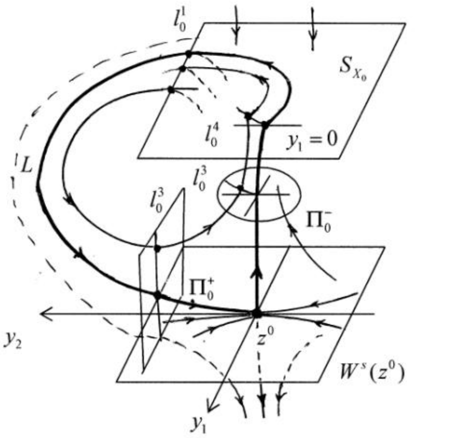

Рис. 1. Траектории векторного поля X_0 ($m = 1$).

6. Доказательство. Из пункта д) условия $C_4)$ следует, что $\hat{\tau}_u'(0,0) \neq 0$. За счет выбора η_ε (сделав при необходимости замену $\eta_\varepsilon(u)$ на $\eta_\varepsilon(-u)$) можно добиться, чтобы $\hat{\tau}_u'(0,0) > 0$. Мы можем считать, что при выбранных $\bar{u}$ и δ_3 $\hat{\tau}_u'(u,\varepsilon) > 0$, если $|u| < \bar{u}$, $|\varepsilon| < \delta_3$. Т. к. $\hat{\tau}(0,0) = 0$, то по теореме о неявной функции $\bar{u}$ и δ_3 можно считать выбранными так, что при $|u| < \bar{u}$, $|\varepsilon| < \delta_3$ $\operatorname{sgn} \hat{\tau}(u,\varepsilon) = \operatorname{sgn}(u - u_0(\varepsilon))$, где $u_0 : (-\delta_3, \delta_3) \to (-\bar{u}, \bar{u})$ – C^{r-1}-функция, $u_0(0) = 0$. Т. к. $\hat{\tau}_\varepsilon'(0,0) > 0$, то можно считать, что $\operatorname{sgn} u_0(\varepsilon) = -\operatorname{sgn} \hat{\tau}(0,\varepsilon) = -\operatorname{sgn} \varepsilon$. Обозначим l_ε^2 – дугу в $\Pi_\varepsilon^{++} := \{p \in \Pi_\varepsilon^+ : \tau(p) > 0\}$, задаваемую уравнениями $y_1 = \hat{y}_1(u,\varepsilon)$, $\tau = \hat{\tau}(u,\varepsilon)$, $u_0(\varepsilon) < u \le \bar{u}$. Т. к. $\hat{\tau}_u'(u,\varepsilon) > 0$, то $\bar{l}_\varepsilon^2$ можно задать и уравнением $y_1 = w(\tau,\varepsilon)$, $0 \le \tau \le \hat{\tau}(\bar{u},\varepsilon)$, где $w \in C^{r-1}$.

Обозначим $\gamma(\varepsilon) := -\lambda_2(\varepsilon) / \lambda_3(\varepsilon)$. По условию $C_3)$ $\gamma(0) > 1$.

Из [2] следует, что координаты (y_1, y_2, τ) и числа d_3 и δ_3 можно считать выбранными так, что при $|\varepsilon| < \delta_3$ определен диффеоморфизм $T_\varepsilon^2 : \Pi_\varepsilon^{++} \to \Pi_\varepsilon^-$ по траекториям поля $X_\varepsilon^{(k_*)}$, ставящий в соответствие точке с координатами $y_1 = v,\ \tau > 0$ точку с координатами $y_1 = r_1(v,\tau,\varepsilon)$, $y_2 = a(\varepsilon)\tau^{\gamma(\varepsilon)} + r_2(v,\tau,\varepsilon)$, где $a(\varepsilon) > 0$, $a, r_i \in C^{r-1}$,

$$|r_i(v,\tau,\varepsilon)| + |\frac{\partial}{\partial v} r_i(v,\tau,\varepsilon)| + |\frac{\partial}{\partial \varepsilon} r_i(v,\tau,\varepsilon)| \le N\tau^{\alpha},\ |\frac{\partial}{\partial \tau} r_i(v,\tau,\varepsilon)| \le N\tau^{\alpha-1},\ i = 1,2, \tag{1}$$

при некоторых $N > 0$ и $\alpha > \gamma(0)$. Выберем числа γ_- и γ_+ так чтобы $1 < \gamma_- < \gamma(0) < \gamma_+ < \alpha$. Тогда найдется такое $\delta_4 \in (0, \delta_3]$, что для $|\varepsilon| < \delta_4$ $\gamma_- < \gamma(\varepsilon) < \gamma_+$. В окрестности точки $\xi(t_1)$ на S_{X_ε} введем координаты y_1, y_2, индуцированные с Π_ε^- диффеоморфизмом T_ε^3. Обозначим $l_\varepsilon^3 := T_\varepsilon^3 \circ T_\varepsilon^2(l_\varepsilon^2)$. В координатах l_ε^3: $y_1 = r_1(w(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)$ $y_2 = y_2^*(\tau,\varepsilon) := a(\varepsilon)\tau^{\gamma(\varepsilon)} + r_2(w(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)$, $0 < \tau \le \hat{\tau}(\bar{u},\varepsilon)$.

Используя (1), получаем, что для некоторой постоянной $C > 0$

$$0 < \partial y_2^*(\tau,\varepsilon) / \partial\tau \le C\tau^{\gamma_- - 1} \text{ при } 0 < \tau \le \hat{\tau}(\bar{u},\varepsilon),\ |\varepsilon| < \delta_4. \tag{2}$$

Поэтому $y_2^*(\cdot,\varepsilon)$, $|\varepsilon| < \delta_4$, имеет обратную функцию $\tau^*(\cdot,\varepsilon)$, причем $\tau^*(\cdot,\cdot) \in C^{r-1}$, $\tau^*(+0,\varepsilon) = 0$. Пусть $g(0,\varepsilon) := 0$ и $g(y_2,\varepsilon) := r_1(w(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big|_{\tau=\tau^*(y_2,\varepsilon)}$ при $y_2 > 0$. Уравнение $y_1 = g(y_2,\varepsilon)$ задает дугу $\bar{l}_\varepsilon^3 = l_\varepsilon^3 \cup \{p(\varepsilon)\}$. Ввиду (1) при некотором $K > 0$

$$|g(y_2,\varepsilon)| + |\partial g(y_2,\varepsilon)/\partial y_2| + |\partial g(y_2,\varepsilon)/\partial\varepsilon| \le K(\tau^*(y_2,\varepsilon))^{\alpha-\gamma_+} \le K(\hat{\tau}(\bar{u},\varepsilon))^{\alpha-\gamma_+}. \tag{3}$$

Поэтому g непрерывно дифференцируема. Из (3) также видно, что за счет выбора $\bar{u}$ и δ_4 $\max|\partial g(y_2,\varepsilon)/\partial y_2|$ можно сделать сколь угодно малым. Но тогда вследствие условия C_5) найдется такое $\delta_5 \in (0, \delta_4]$, что при $|\varepsilon| < \delta_5$ векторное поле S_{X_ε} трансверсально $\bar{l}_\varepsilon^3$. Поскольку траектория поля X_ε, $|\varepsilon| < \delta_5$, начинающаяся в точке $p(\varepsilon)$, пересекает дугу $\eta_\varepsilon(-u_*, u_*)$ в точке $\eta_\varepsilon(0)$, то определен диффеоморфизм $T_\varepsilon^4 : \bar{l}_\varepsilon^3 \to \eta_\varepsilon(-u_*, u_*)$ по траекториям поля X_ε, переводящий точку с координатой $y_2 = v$ в точку $\eta_\varepsilon(\varphi(v,\varepsilon))$, где φ – C^1-функция, $\varphi(0,\varepsilon) = 0$, $\varphi_v'(v,\varepsilon) \ne 0$. Отображение последования $T_\varepsilon = T_\varepsilon^4 \circ T_\varepsilon^3 \circ T_\varepsilon^2 \circ T_\varepsilon^1$ переводит точку $\eta_\varepsilon(u)$, $u_0(\varepsilon) < u \le \bar{u}$, в точку $\eta_\varepsilon(f_\varepsilon(u))$, где $f_\varepsilon(u) = \varphi(y_2^*(\hat{\tau}(u,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon))$. Доопределим $f_\varepsilon(u)$ по непрерывности при $u = u_0(\varepsilon)$, положив $f_\varepsilon(u_0(\varepsilon)) = \varphi(0,\varepsilon) = 0$. Так как φ и $\hat{\tau}$ – C^1-функции, то существует такая постоянная $C_1 > 0$, что $|\varphi_v'(v,\varepsilon)| \le C_1$ при $|\varepsilon| \le \delta_5$, $0 \le v \le y_1^*(\hat{\tau}(\bar{u},\varepsilon),\varepsilon)$, $|\hat{\tau}_u'(u,\varepsilon)| \le C_1$ при $|\varepsilon| < \delta_5$, $|u| \le \bar{u}$.

Из (2) получаем, считая, что $\bar{u}$ и δ_5 достаточно малы, $0 < \partial y_1^*(\hat{\tau}(u,\varepsilon),\varepsilon)/\partial\tau \le C[\hat{\tau}(\bar{u},\varepsilon)]^{\gamma_- - 1} < 1/C_1^2$, если $|\varepsilon| < \delta_5$, $u_0(\varepsilon) < u \le \bar{u}$.

Поэтому при всех $u_0(\varepsilon) < u \le \bar{u}$ $|(f_\varepsilon)'(u)| < 1$.

Пусть сначала $\varphi_v'(v,\varepsilon) > 0$ и, соответственно, $(f_\varepsilon)'(u) > 0$. Т. к. $f_0(0) = 0$, то по формуле Лагранжа $0 < f_0(\bar{u}) < \bar{u}$ и при некотором $\delta \in (0, \delta_5]$ $0 < f_\varepsilon(\bar{u}) < \bar{u}$, если $|\varepsilon| \le \delta$. При $0 < \varepsilon \le \delta$ $f_\varepsilon(u_0(\varepsilon)) = 0 > u_0(\varepsilon)$. Поэтому T_ε имеет единственную (причем устойчивую и гиперболическую) неподвижную точку $\eta_\varepsilon(u_f(\varepsilon))$. Ясно, что $u_f(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Через точку $\eta_\varepsilon(u_f(\varepsilon))$ проходит устойчивая гиперболическая замкнутая траектория $\Gamma(\varepsilon)$, для которой $\operatorname{lt}_{\varepsilon\to 0} \Gamma(\varepsilon) = \Gamma_0$. При $-\delta \le \varepsilon \le 0$ $u_0(\varepsilon) \ge 0$. По формуле Лагранжа $f_\varepsilon(u) = (f_\varepsilon)'(c)(u - u_0(\varepsilon)) < u$, и потому T_ε не имеет неподвижных точек. При $-\bar{u} \le u < u_0(\varepsilon)$ $\hat{\tau}(u,\varepsilon) < 0$, поэтому через точки $\eta_\varepsilon(u)$ не может проходить замкнутая траектория, лежащая в достаточно малой окрестности петли Γ_0. Нетрудно построить окрестность $U(\Gamma_0)$ петли Γ_0, для которой при достаточно малом δ любая траектория поля X_ε, $|\varepsilon| \le \delta$, лежащая в ней, обязательно пересекает дугу $\eta_\varepsilon(-\bar{u}, \bar{u})$. Поэтому при достаточно малом δ $\Gamma(\varepsilon)$ – единственная замкнутая траектория в $U(\Gamma_0)$.

Случай $(f_\varepsilon)'(u) < 0$ рассматривается аналогично.

Библиографический список

1. Арнольд, В. И. Теория бифуркаций [Текст] /В. И. Арнольд и др. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 5. – М. : ВИНИТИ, 1986. – С. 5–218.
2. Овсянников, И. М. О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса [Текст] / И. М. Овсянников, Л. П. Шильников // Мат. сб. − 1986. − Т. 130. – № 4. − С. 552−570.
3. Ройтенберг, В. Ш. О бифуркациях перерождения замкнутых траекторий кусочно-гладких векторных полей [Текст] / В. Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика : Межвуз. сб. науч. тр. Вып.4. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2004. – С. 75–81.
4. Ройтенберг, В. Ш. О рождения устойчивых замкнутых траекторий динамических систем, задаваемых кусочно-гладкими векторными полями [Текст] / В. Ш. Ройтенберг // Вестник ЯГТУ. 2004. – Вып.4. – С. 206–208.
5. Ройтенберг, В. Ш. О рождения устойчивых замкнутых траекторий кусочно-гладких векторных полей [Текст] / В. Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика : Межвуз. сб. науч. тр. Вып.5. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2006. – С. 37–49.
6. Ройтенберг, В. Ш. О рождения устойчивых замкнутых траекторий разрывных векторных полей [Текст] / В. Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.3. – Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2002. – С. 19–22.
7. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [Текст] / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1985. – 224 с.
8. Шильников, Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий [Текст] / Л. П. Шильников // Мат. сб. − 1963. − Т. 61. – № 4. − С. 443−466.

Bibliograficheskij spisok

1. Arnol'd, V. I. Teorija bifurkacij [Tekst] /V. I. Arnol'd i dr. // Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravlenija, T. 5. – M. : VINITI, 1986. – S. 5–218.
2. Ovsjannikov, I. M. O sistemah s gomoklinicheskoj krivoj sedlo-fokusa [Tekst] / I. M. Ovsjannikov, L. P. Shil'nikov // Mat. sb. − 1986. − T. 130. – № 4. − S. 552−570.
3. Rojtenberg, V. Sh. O bifurkacijah pererozhdenija zamknutyh traektorij kusochno-gladkih vektornyh polej [Tekst] / V. Sh. Rojtenberg // Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teorija i praktika : Mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp.4. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGTU, 2004. – S. 75–81.
4. Rojtenberg, V. Sh. O rozhdenija ustojchivyh zamknutyh traektorij dinamicheskih sistem, zadavaemyh kusochno-gladkimi vektornymi poljami [Tekst] / V. Sh. Rojtenberg // Vestnik JaGTU. 2004. – Vyp.4. – S. 206–208.
5. Rojtenberg, V. Sh. O rozhdenija ustojchivyh zamknutyh traektorij kusochno-gladkih vektornyh polej [Tekst] / V. Sh. Rojtenberg // Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teorija i praktika : Mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp.5. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGTU, 2006. – S. 37–49.
6. Rojtenberg, V. Sh. O rozhdenija ustojchivyh zamknutyh traektorij razryvnyh vektornyh polej [Tekst] / V. Sh. Rojtenberg // Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teorija i praktika: Mezhvuz. sb. nauch. tr. Vyp.3. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGTU, 2002. – S. 19–22.
7. Filippov, A. F. Differencial'nye uravnenija s razryvnoj pravoj chast'ju [Tekst] / A. F. Filippov. – M. : Nauka, Glavnaja redakcija fiz.-mat. literatury, 1985. – 224 s.
8. Shil'nikov, L. P. O nekotoryh sluchajah rozhdenija periodicheskih dvizhenij iz osobyh traektorij [Tekst] / L. P. Shil'nikov // Mat. sb. − 1963. − T. 61. – № 4. − S. 443−466.