УДК 524.8

В. Г. Кречет, Д. В. Садовников, М. В. Левкоева

Пятимерная геометрическая задача Райсснера−Нордстрема с геометризированным скалярным полем

Рассматривается пятимерная геометрическая задача Райсснера−Нордстрема с геометризированным скалярным полем в рамках пятимерной теории гравитации и электромагнетизма. Получены соответствующие точные сферически-симметричные решения пятимерных вакуумных уравнений Эйнштейна, определяющих физические поля в данной задаче. Среди них есть решения, описывающие геометрию «кротовых нор».

Ключевые слова: гравитация, пятимерная теория, Райсснер−Нордстрем, электромагнетизм, «кротовые норы».

V. G. Krechet, D. V. Sadovnikov, M. V. Levkoeva

The Five-Dimensional Geometric Reisner−Nordstrem Problem with the Geometrized Scalar Field

We consider a five-dimensional geometric Reisner−Nordstrem problem with the geometrized scalar field in the five-dimensional theory of gravity and electromagnetism. The corresponding exact spherically symmetric solutions of the five-dimensional vacuum Einstein's equations, which define physical fields in the given problem, have been found. Among them there are the solutions describing geometry of «wormholes».

Keywords: gravitation, a five-dimensional theory, Reisner−Nordstrem, electromagnetism, «wormholes».

В рамках пятимерной геометрической теории гравитации электромагнетизма Калуцы [1] рассматривается задача Райсснера-Нордстрема при учете геометрического скалярного поля $G_{44}(x)$ в пространстве со сферической симметрией, описываемом пятимерной метрикой вида

$$dI^2 = -e^{\nu} dt^2 + e^{\lambda} dx^2 + e^{\mu}(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + e^{\alpha}(dx^4)^2 + 2e^{\beta} dt \, dx^4, \qquad (1)$$

где все метрические коэффициенты: e^{ν}, e^{λ}, e^{μ}, e^{α}, e^{β} – зависят только от x, при этом коэффициент $G_{44}(x) = e^{\alpha}$ имеет смысл геометризированного скалярного поля, e^{β} пропорционален электромагнитному потенциалу $\varphi_{,e}$.

В качестве гравитационного лагранжиана L_g в единой теории гравитации и электромагнетизма Калуцы-Клейна выбирается, как и в ОТО, скаляр кривизны ${}^5R(G_{AB})$, но уже пятимерного пространства:

$$L_g = {}^5R(G_{AB})\sqrt{-G}, \qquad (2)$$

где G − определитель матрицы метрических коэффициентов G_{AB} общей пятимерной метрики (1), для которой

$${}^5R(G_{AB}) = \left(-\frac{\Delta''}{\Delta} - 2\mu'' + \frac{\lambda'\Delta'}{2\Delta} - \frac{\mu'\Delta'}{\Delta} + \frac{\Delta'^2}{2\Delta^2} - \frac{3}{2}\mu'^2 + \mu'\lambda' + \frac{\alpha'\nu' e^{\alpha+\nu} + \beta'^2 e^{2\beta}}{2\Delta} \right) e^{-\lambda} + 2e^{-\mu}.$$

Здесь $\Delta = e^{\alpha+\nu} + e^{2\beta}$.

В рассматриваемом случае пятимерный гравитационный лагранжиан (2) данной вакуумной модели с метрикой (1) за вычетом дивергентного члена принимает вид

$$L = \left(\frac{\Delta'\mu'}{\Delta} + \frac{\mu'^2}{2} + \frac{\alpha'\nu' e^{\alpha+\nu} + \beta'^2 e^{2\beta}}{2\Delta} + 2e^{\lambda-\mu} \right) \sqrt{\Delta} \, e^{\mu - \frac{\lambda}{2}}. \qquad (3)$$

Варьированием лагранжиана (3) по независимым переменным $\nu(x)$, $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ получается совместная система уравнений для гравитационного, взаимодействующих электромагнитного и скалярного полей геометрического происхождения. В данной задаче эта система уравнений получается эквивалентной системе первых интегралов:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta'\mu'}{\Delta}+\dfrac{\mu'^2}{2}+\dfrac{\alpha'\nu'e^{\alpha+\nu}+\beta'^2e^{2\beta}}{2\Delta}-2e^{\lambda-\mu}=0; \\ \left[\left(\dfrac{\Delta'}{\Delta}+\mu'\right)\sqrt{\Delta}\,e^{\mu-\frac{\lambda}{2}}\right]=2\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}}; \\ (\alpha'-\nu')e^{\alpha+\nu}=C_1\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}-\mu}; \\ (\alpha'-\beta')e^{\alpha+\beta}=C_2\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}-\mu}; \\ (\nu'-\beta')e^{\nu+\beta}=C_3\sqrt{\Delta}\,e^{\frac{\lambda}{2}-\mu}, \end{cases} \tag{4}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

В гармонических координатах: $G^{11}\sqrt{-G}=const$, которые в данной задаче записываются как $\Delta=e^{\lambda-2\mu}$, – система (4) приобретает вид:

$$\begin{cases} \text{а) } \mu'\lambda'-\dfrac{3}{2}\mu'^2+\dfrac{\alpha'\nu'e^{\alpha+\nu}+\beta'^2e^{2\beta}}{2\Delta}-2e^{\lambda-\mu}=0; \\ \text{б) } (\lambda-\mu)'=\varepsilon\sqrt{4e^{\lambda-\mu}+k}, \quad \text{где} \quad k=const; \\ \text{в) } (\alpha'-\nu')e^{\alpha+\nu}=C_1\Delta; \\ \text{г) } (\alpha'-\beta')e^{\alpha+\beta}=C_2\Delta; \\ \text{д) } (\nu'-\beta')e^{\nu+\beta}=C_3\Delta. \end{cases} \tag{5}$$

где $\varepsilon=\pm1$ – знаковая функция.

Поскольку метрические коэффициенты $G_{tt}=e^{\nu}$ и $G_{44}=e^{\beta}$ зависят только от x и не зависят ни от t, ни от x^4 соответственно, то в интеграле (5в) константу C_1 можно положить равной нулю. Откуда получим при соответствующей калибровке масштабов координат t и x^4: $e^{\alpha}=e^{\nu}$, а значит и $C_2=C_3\equiv C$.

Из системы (5) следует:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f'^2(x)}{f^2(x)}-\dfrac{\Delta'^2}{\Delta^2}\right)+\dfrac{\alpha'\nu'e^{\alpha+\nu}+\beta'^2e^{2\beta}}{2\Delta}-2f(x)=0; \\ e^{\lambda-\mu}=f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{при} \quad k\equiv 0; \\ \dfrac{a^2}{\cos^2 ax} & \text{при} \quad k\equiv -4a^2<0; \\ \dfrac{a^2}{\operatorname{sh}^2 ax} & \text{при} \quad k\equiv 4a^2>0, \end{cases} \\ e^{\alpha-\beta}=\operatorname{tg} Cx, \end{cases} \tag{6}$$

откуда получаем: $e^{\nu}=e^{\alpha}=Ae^{mx}\sin Cx,\ \ e^{\beta}=Ae^{mx}\cos Cx$ (7)

где $A,m=\text{const}$, при этом $m^2=\sqrt{(C^2+k)/3}$ и $0<x<\dfrac{\pi}{C}$. (8)

В зависимости от постоянной k другие коэффициенты метрики (1) выглядят:

1) при $k\equiv 0$

$$e^{\mu}=\frac{e^{-2mx}}{A^2x^2},\ \ e^{\lambda}=\frac{e^{-2mx}}{A^2x^4}; \tag{9}$$

2) при $k\equiv 4a^2>0$

$$e^{\mu}=\frac{a^2e^{-2mx}}{A^2\operatorname{sh}^2 ax},\ \ e^{\lambda}=\frac{a^2e^{-2mx}}{A^2\operatorname{sh}^4 ax} \tag{10}$$

3) при $k\equiv -4a^2<0$

$$e^{\mu}=\frac{a^2e^{-2mx}}{A^2\cos^2 ax},\ \ e^{\lambda}=\frac{a^2e^{-2mx}}{A^2\cos^4 ax} \tag{11}$$

Представляет интерес последнее решение (11). Здесь при $-\dfrac{\pi}{2a}<x<\dfrac{\pi}{2a}$ поведение метрического коэффициента e^{μ} соответствует пространству-времени «кротовой норы», т. к. он нигде не обращается в нуль, а на границах области ($x\to-\pi/2a$ и $x\to\pi/2a$) неограниченно возрастает. Кроме того, чтобы совместить границы интервалов (8) и (12), необходимо, чтобы $C = 2a$. При этом постоянная a имеет смысл параметра растяжения масштабов «кротовой норы», поскольку $x_{\text{гр}} = \pm\pi / 2a$ возрастают с уменьшением a и убывают с его ростом. Горловина получившейся «кротовой норы» соответствует минимуму функции e^{μ}. В самом деле, максимум функции $\cos ax$ равен единице при $x = 0$. Отсюда получаем, что радиус горловины «кротовой норы» равен $e^{\mu}(x = 0) = a^2 / A^2$.

Из (7) следует, что поскольку при $x < 0$ функции e^{ν} и e^{α} становятся отрицательными, то временная координата t становится пространственной, а 4-я пространственная координата x^4 – временной координатой, т. е. получается, что координаты t и x^4 меняются ролями, но сигнатура метрики при этом не изменяется.

Библиографический список

1. Владимиров, Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации [Текст] / Ю. С. Владимиров. − М. : Энергоиздат, 1982. – 256 с.
2. Bronnikov K. A. Acta Phys. Pol. B4 (1973), 251.

Bibliograficheskij spisok

1. Vladimirov, Ju. S. Sistemy otscheta v teorii gravitacii [Tekst] / Ju. S. Vladimirov. − M. : Jenergoizdat, 1982. – 256 s.
2. Bronnikov K. A. Acta Phys. Pol. B4 (1973), 251.