В. Г. Кречет, С. В. Родичев, И. В. Синильщикова

Стационарные распределения самогравитирующего нелинейного скалярного поля с вихревым гравитационным полем.

Показано, что у гравитационного поля может существовать вихревая составляющая часть, которая может быть отделена от основного гравитационного поля. Эта вихревая составляющая формирует свой соответствующий эффективный тензор энергии-импульса (ТЭИ), обладающий экзотическими свойствами, что способствует образованию «кратовых нор». Учитывается также влияние самогравитирующего нелинейного скалярного поля совместно с вихревым гравитационным полем. Получены решения, описывающие геометрию «кратовых нор».

Ключевые слова: гравитация, вихревое поле, тетрада, скалярное поле, «кратовая нора», метрика, уравнения Эйнштейна.

V. G. Krechet, S. V. Rodichev, I. V. Sinilshchikova

Stationary distributions of the self-gravitating nonlinear scalar field with the vortex gravitational field

It is shown that the gravitational field may have a vortex part which can be separated from the main gravitational field. This vortex component forms the corresponding effective energy impulse tensor (EIT) possessing exotic properties; it promotes formation of «wormholes». Influence of the self-gravitating nonlinear scalar field together with the vortex gravitational field is taken into consideration. The solutions describing geometry of «wormholes» are received.

Keywords: gravitation, a vortex field, tetrad, a scalar field, «wormholes», metrics, Einstein's equations.

Показано [1, 3], что стационарное вихревое поле даже для случая вакуума может действительно образовывать «кратовые норы», а также при взаимодействии с вращающейся идеальной жидкостью [2] и с самогравитирующим безмассовым скалярным полем [5]. В последней работе было проведено исследование асимптотики получающихся «кратовых нор» и проведена сшивка с внешним плоским пространством, и показано, что при такой сшивке необходима промежуточная тонкая мембрана из «фантомной» материи.

В данной работе мы рассмотрим стационарную систему с вихревым гравитационным полем и с гравитирующим нелинейным скалярным полем $\phi(x,y,z,t)$, имеющим потенциалы $V(\phi)$, специальных типов, имеющих физическую интерпретацию.

Здесь мы рассматриваем случай цилиндрической симметрии с метрикой пространства-времени, допускающей существование стационарного вихревого гравитационного поля:

$$ds^2 = A dx^2 + B d\phi^2 + C dz^2 + 2E d\phi dt - D dt^2 \tag{1}$$

где все метрические коэффициенты зависят лишь от одной радиальной координаты x . Это простейший тип пространства-времени с вихревым гравитационным полем.

В общем случае вихревое гравитационное поле описывается четырехмерным ротором тетрадного поля $e_a^i(x^k)$; его кинематическая характеристика есть угловая скорость ω^i вращения тетрады e_a^i :

$$\omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} e_{ak} e_{l;m}^a \tag{2}$$

где латинские индексы середины алфавита ($i,k,l,m,\dots$) соответствуют четырем мировым координатам x^k , а латинские индексы начала алфавита ($a,b,c,\dots$) соответствуют локальным координатам x^a касательного пространства Минковского. Вектор ω^k определяет эффективный вектор плотности момента импульса гравитационного поля:

$${}_{\mathbb{E}}S^k = \omega^k / \kappa \tag{3}$$

($\kappa = 8\pi G/c^4$) – гравитационная константа Эйнштейна.

В стационарном пространстве (1) интенсивность гравитационного вихря $\omega = \sqrt{\omega_k \omega^k}$ определяется формулой [1, 2, 3]:

$$\omega = \frac{E'D - D'E}{2D\sqrt{C\Delta}}; (\Delta = BD + E^2) \quad (4)$$

Геометрические свойства пространственного сечения $t = \text{const}$ пространства-времени (1) определяется трехмерной метрикой

$$dl^2 = Adx^2 + \frac{BD+E^2}{\Delta} d\varphi^2 + Cdz^2 \quad (5)$$

Здесь угловой метрический коэффициент $g_{\varphi\varphi} = \frac{BD+E^2}{\Delta} \equiv R^2$ при неограниченном возрастании определяет пространственную бесконечность, а при $R=0$ имеем ось симметрии OZ.

Считая, что наша вращающаяся система отсчета сопутствует материальному источнику гравитационного поля, то азимутальный поток материи в такой системе отсчета $T_4^2 = 0$, и из уравнения Эйнштейна $R_4^2 = \kappa T_4^2$ получаем, что $R_4^2 = 0$, откуда при интегрировании этого уравнения ($R_4^2 = 0$) получаем, что

$$\omega = \omega_0 / D\sqrt{C}; (\omega_0 = \text{const}) \quad (6)$$

Здесь T_4^2 – компонента ТЭИ материи, а R_4^2 – компонента тензора кривизны Риччи.

В данной работе в качестве материального источника гравитационного поля используем, как указывалось выше, нелинейное скалярное поле с потенциалом $V(\varphi)$.

Причем $V(\varphi)$ выбираем в виде:

- 1) $V(\varphi) = V_0(\cos m\varphi)^{2a} (V_0 = \text{const})$
- 2) $V(\varphi) = V_0(\text{ch} m\varphi)^{2a} (m = \text{const})$
- 3) $V(\varphi) = V_0(\text{sh} m\varphi)^{2a} (a = \text{const})$

Такой выбор типов потенциалов обусловлен следующими аргументами.

Так, например, при $a = \frac{1}{2}$ потенциал (7.1) $V(\varphi) = V_0 \cos m\varphi$ совпадает с потенциалом псевдоскалярного аксионного поля [4], которое может присутствовать в хромодинамике для предотвращения нарушения CP-симметрии, а также в геометрической модели электрослабых взаимодействий. Поскольку $\cos m\varphi$ – четная функция, то лагранжиан аксионного поля будет инвариантен относительно P-преобразования ($\varphi \rightarrow -\varphi$). То же можно сказать и о потенциале (7.2) $V(\varphi) = V_0(\text{ch} m\varphi)^{2a}$.

Потенциал (7.3) $V(\varphi) = V_0 \text{sh} m\varphi$ для скалярного поля был использован в космологических моделях с «темной энергией». Полный лагранжиан скалярного поля имеет вид:

$$L(\varphi) = -\frac{1}{2} \varphi_{,k} \varphi^{,k} - V(\varphi) \quad (8)$$

и с $L(\varphi)$ какого либо из приведенных в (7), и оно является источником геометрии (1).

Будем полагать, что $\varphi = \varphi(x)$ и использовать сопутствующую систему отсчета и решать уравнения Эйнштейна для скалярного поля (8) в пространстве времени в форме

$$R_k^i = -\kappa \left(T_k^i - \frac{1}{2} T_k^k \delta_k^i \right) = -\kappa (\varphi_{,k} \varphi^{,i} - \delta_k^i V(\varphi)) \quad (9)$$

В геометрии (1) и при $\varphi = \varphi(x)$ тензор энергии-импульса скалярного поля (8) будет иметь вид:

$$T_k^i = \frac{1}{2A} \varphi'^2 \text{diag}(-1, 1, 1, 1) + \delta_k^i V(\varphi) \quad (10)$$

Далее для удобства перейдем к экспоненциальным обозначениям для метрических коэффициентов:

$$A = e^{2\alpha}; R^2 = e^{2\beta}; C = e^{2\mu}; D = e^{2\gamma} \quad (11)$$

и используем гармоническую радиальную координату x , так что будем иметь условие:

$$\alpha = \beta + \gamma + \mu \quad (12)$$

Тогда система уравнений Эйнштейна (9) будет иметь вид:

$$1) \gamma' \beta' + \gamma' \mu' + \beta' \mu' = \frac{1}{2} \kappa \varphi'^2 - \kappa V(\varphi) e^{2\alpha} \omega_0^2 e^{2\beta - 2\gamma}$$

$$\begin{aligned} 2) \beta'' &= 2\omega_0^2 e^{2\beta-2\gamma} - \kappa V(\varphi) e^{2\alpha} \\ 3) \gamma'' &= -2\omega_0^2 e^{2\beta-2\gamma} - \kappa V(\varphi) e^{2\alpha} \\ 4) \mu'' &= -\kappa V(\varphi) e^{2\alpha} \end{aligned} \quad (13)$$

и добавляем сюда уравнение для самого нелинейного скалярного поля

$$\varphi'' = \frac{dV}{d\varphi} e^{2\alpha} \quad (14)$$

Так что будем решать совместную систему уравнений гравитационного и скалярного полей (13,14) с неизвестными функциями $\varphi(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\mu(x)$.

Выпишем сначала следующие из (13, 14) соотношения и решения, справедливые при любом выборе $V(\varphi)$.

Складывая уравнения 2) и 3) в системе (13) и сравнивая результат с уравнением 4), найдем, что

$$\mu'' = \frac{\gamma'' + \beta''}{2}, \text{ откуда: } \mu' = \frac{\alpha' + \beta'}{2} + c, \mu = \frac{\alpha + \beta}{2} + cx; (c = \text{const})$$

$$\alpha = \frac{3}{2}(\gamma + \beta) + cx \quad (15)$$

Далее вычитая 2) и 3) в (13), получим уравнение Лиувилля для функции $\beta - \gamma$:

$$\beta'' - \gamma'' = 4\omega_0^2 e^{2(\beta-\gamma)} \quad (16)$$

Первый интеграл этого уравнения следующий

$$-\beta' + \gamma' = \sqrt{4\omega_0^2 e^{2\beta-2\gamma} + \text{sign } k \cdot k^2} \quad (k = \text{const}) \quad (17)$$

Здесь $\text{sign } k$ - знаковая функция от k .

Окончательное решение уравнения (16) следующее:

$$e^{\beta-\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{k}{\text{sh}(kx)}; \text{ при } k > 0 \\ \frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{x}; \text{ при } k = 0 \\ \frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{k}{\text{sin}(kx)}; \text{ при } k < 0 \end{cases} \quad (18)$$

Теперь складываем уравнения (13.2) и (13.3) и, учитывая соотношения (15), получим уравнение для функции $\gamma(x) + \beta(x)$:

$$\beta'' + \gamma'' = -2\kappa V(\varphi) e^{3(\beta+\gamma)+2\alpha} \quad (19)$$

или, учитывая, что $2\alpha = 3(\gamma + \beta) + 2cx$, а $2\alpha'' = 3(\gamma'' + \beta'')$, из (19), получим также уравнение для функции $2\alpha(x)$:

$$2\alpha'' = -b\kappa V(\varphi) e^{2\alpha} \quad (20)$$

Далее для сокращения перейдем к безразмерному скалярному потенциалу $\varphi(x)$ преобразованием: $\sqrt{\kappa}\varphi \rightarrow \varphi$. Тогда во всех вышеприведенных уравнениях сократится гравитационная константа κ . И рассмотрим выражение из первых двух слагаемых в правой части уравнения (13.1), проинтегрировав его по x :

$$\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - V(\varphi)e^{2\alpha}\right)' = \varphi'\varphi'' - \frac{dV}{d\varphi}\varphi'e^{2\alpha} - 2\alpha'V(\varphi)e^{2\alpha} \quad (21)$$

Теперь учтем уравнение (14) для скалярного поля и получим:

$$\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - V(\varphi)e^{2\alpha}\right)' = -2\alpha'V(\varphi)e^{2\alpha} \quad (22)$$

С учетом уравнения (20) исключим множитель $V(\varphi)e^{2\alpha}$ в правой части (22)

$$\left(\frac{1}{2}\varphi'^2 - V(\varphi)e^{2\alpha}\right)' = \frac{2}{3}\alpha'\alpha'' \quad (23)$$

В правой части (23) теперь стоит интегрируемое выражение: $\frac{2}{3}\alpha'\alpha'' = \left(\frac{1}{3}\alpha'^2\right)'$. Поэтому, интегрируя (23), получим:

$$\frac{1}{2}\varphi'^2 - V(\varphi)e^{2\alpha} = \frac{1}{3}\alpha'^2 + c_2 \quad (c_2 = \text{const}) \quad (24)$$

Выражение (24), так же как и (17), представляют собой еще один первый интеграл системы дифференциальных уравнений (13), (14), т. к., подставив (24) в уравнение (13.1) вместе с (17), получим тождество с условием на константы интегрирования:

$$c_2 + \frac{c^2}{3} + \frac{1}{4} \text{sign } k \cdot k^2 = 0 \quad (25)$$

Соотношение (24) вместе с уравнением для скалярного поля (14) при известном потенциале $V(\varphi)$ представляют собой замкнутую систему уравнений для функций $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$, решая которую, найдем $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$, а затем с помощью (17) и все остальные функции $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\mu(x)$.

Но сначала понизим порядок уравнения для скалярного поля (14), приняв за неизвестную функцию $\varphi' \equiv \psi(\varphi)$, и переходя от аргумента x к аргументу φ ; так что уравнения (14), (24) будут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\varphi} \psi = \frac{dV}{d\varphi} e^{2\alpha} \quad (26) \\ \frac{1}{2} \psi^2 - V(\varphi) e^{2\alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{d\alpha}{d\varphi} \right)^2 \psi^2 + c_2 \end{cases} \quad (27)$$

То есть получили систему из двух уравнений первого порядка для функций $\alpha(\varphi)$ и $\psi(\varphi)$.

Решение этой системы следующее:

$$\psi(\varphi) \equiv \varphi'(\varphi) = \sqrt{2ac_1} V(\varphi)^{1/2a}; \quad e^\alpha = c_1 V(\varphi)^{\frac{1-a}{a}} \quad (c_1 = \text{const}) \quad (28)$$

Найденное решение, в котором искомые функции выражаются через потенциал $V(\varphi)$, справедливо именно для потенциалов вида (7), используемых в данной работе. Из условий совместности уравнений (26), (27) находим соотношения между константами интегрирования c_1 , c_2 и параметрами физической системы полей V_0 , a , m . Причем для каждого из этих 3-х потенциалов они будут разные.

1) Так для потенциала $V(\varphi) = V_0(\text{ch } m\varphi)^{2a}$ условия совместности следующие:

$$c_2 = (a - 1) c_1 V_0^{1/a}; \quad m^2 = \frac{3}{2a(a-1)}; \quad (a(a-1)) > 0 \quad (29)$$

2) Для потенциала $V(\varphi) = V_0(\text{sh } m\varphi)^{2a}$ условия получаются следующими:

$$c_2 = (1 - a) c_1 V_0^{1/a}; \quad m^2 = \frac{3}{2a(a-1)}; \quad (a(a-1)) > 0 \quad (30)$$

3) Для потенциала $V(\varphi) = V_0(\text{cos } m\varphi)^{2a}$ условия совместности следующие:

$$c_2 = (a - 1) c_1 V_0^{1/a}; \quad m^2 = \frac{3}{2a(1-a)}; \quad (a(1-a)) > 0 \quad (31)$$

Далее, когда известна функция $e^{2(\beta-\gamma)}$ (17) и получены функции $\varphi' = \varphi'(V(\varphi))$ и $\alpha(V(\varphi))$ (28), легко получается решение для всех неизвестных функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\mu(x)$ при учете условий совместности (29), (30), (31) и (25) для всех трех типов потенциалов (7):

I. Решение для потенциала $V(\varphi) = V_0(\text{cos } m\varphi)^{2a}$, что соответствует аксионному полю:

$$m = \sqrt{\frac{3}{2a(1-a)}}; \quad 0 < a < 1; \quad c_1 V_0^{1/a} (1-a) = \frac{1}{3} c^2 + \frac{1}{4} \text{sign } k \cdot k^2 \quad (32)$$

$$e^{2\beta} = \begin{cases} \text{a) } \frac{kc^{1/3} V_0^{\frac{1-a}{3a}} \cdot e^{-cx}}{2\omega_0 \text{sh } kx \cdot (\text{ch } px)^{2(1-a)/3}}; \quad (k > 0) \\ \text{b) } \frac{c^{1/3} V_0^{\frac{1-a}{3a}} \cdot e^{-cx}}{2\omega_0 \cdot x \cdot (\text{ch } px)^{2(1-a)/3}}; \quad (k = 0) \\ \text{c) } \frac{kc^{1/3} V_0^{\frac{1-a}{3a}} \cdot e^{-cx}}{2\omega_0 \sin kx \cdot (\text{ch } px)^{2(1-a)/3}}; \quad (k < 0) \end{cases} \quad e^{2\gamma} = \begin{cases} \frac{2\omega_0 c^{1/3} V_0^{\frac{1-a}{3a}} \cdot \text{sh } kx}{k(\text{ch } px)^{2(1-a)/3} \cdot e^{cx}}; \quad (k > 0) \\ \frac{2\omega_0 c^{1/3} V_0^{\frac{1-a}{3a}} \cdot x}{(\text{ch } px)^{2(1-a)/3} \cdot e^{cx}}; \quad (k = 0) \\ \frac{2\omega_0 c^{1/3} V_0^{\frac{1-a}{3a}} \cdot \text{sink } x}{k(\text{ch } px)^{2(1-a)/3} \cdot e^{cx}}; \quad (k < 0) \end{cases} \quad (33)$$

$$e^{2\alpha} = c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} / (\text{ch } px)^{2(1-a)}; \quad e^{2\mu} = c_1^{1/3} V_0^{\frac{1-a}{3a}} \cdot e^{2cx} / (\text{ch } px)^{2(1-a)/3}; \quad (p = \sqrt{\frac{3c_1 V_0^{1/a}}{(1-a)}}).$$

Здесь коэффициент $g_{\varphi\varphi} = e^{2\beta}$ определяет возможность существования «кротовой норы». При данном потенциале I возможность существования «кротовых нор» существует во всех трех случаях выбора константы k ($k > 0$, $k = 0$, $k < 0$) при соответствующем подборе констант c, k, p , не противоречащем условию совместности (32).

а) при $k > 0$ для существования «кротовой норы» должно быть: $c < 0$ и $|c_1| > \sqrt{k} + \sqrt{\frac{4}{3} c_1 (1-a) V_0^{1/a}}$, а область существования решения $0 \leq x < \infty$. При этом $e^{2\beta} \neq 0$ во всей области, и $e^{2\beta} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$, т. е. на краях области существования имеем пространственные бесконечности (вход и выход из «кротовой норы»).

Для остальных метрических коэффициентов в асимптотиках имеем: $e^{2\gamma} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, и $e^{2\gamma} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$; $e^{2\alpha} = \text{const}$ при $x=0$, и $e^{2\alpha} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

б) при $k=0$ для существования «кротовой норы» должно быть $c < 0$ и $|c_1| > \sqrt{\frac{4}{3} c_1 (1-a) V_0^{1/a}}$, а область существования решения та же: $0 \leq x < \infty$, и здесь также $e^{2\beta} \neq 0$ во всей области, а при $x \rightarrow 0$ и при $x \rightarrow \infty$, т. е. в асимптотиках, $e^{2\beta} \rightarrow \infty$, имеем пространственные бесконечности на концах области, то есть имеем «кротовую нору».

Асимптотики для остальных метрических коэффициентов $e^{2\alpha}$ и $e^{2\gamma}$ такие же, как и при $k > 0$.

в) при $k < 0$ область существования решения, $0 \leq x < \frac{\pi}{|k|}$ и во всей области $e^{2\beta} \neq 0$, а на краях $e^{2\beta} \rightarrow \infty$, то есть также получилась «кротовая нора» с условием на константы (32).

При этом метрические коэффициенты $e^{2\alpha}$ и $e^{2\mu}$ на краях области имеют конечную величину и нигде не равны нулю, и только $g_{\varphi\varphi} = e^{2\gamma}$ на краях обращается в нуль, то есть получившаяся «кротовая нора» с обоих концов закрыта горизонтом видимости.

В последнем случае ($k < 0$) метрику геометрии получившейся «кротовой норы» легче всего шить с метрикой вращающейся системы отсчета плоского пространства-времени

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\varphi + \Omega dt)^2 + dz^2 - dt^2 \quad (34)$$

где Ω – угловая скорость вращения системы отсчета, так как при этом два метрических коэффициента $e^{2\alpha}$ и $e^{2\mu}$ в решении (33) с обоих концов являются постоянными, как в плоской метрике (34), и их сшивать не нужно.

II. $V(\varphi) = V_0 (\text{chm}\varphi)^{2a}$. Поскольку $\text{chm}\varphi$ – функция четная, то такой потенциал также годится для аксионного поля.

В этом случае из условий совместности следует:

$$(1-a) c_1 V_0^{1/a} = \frac{3}{4} c^2 + \frac{1}{4} \text{sign } k \cdot k^2; a < 0; k_1 = \sqrt{\frac{3}{2a(1-a)}} \quad (35)$$

и существует соотношение, следующее из решения:

$$\text{chm}\varphi = \frac{1}{\cos px}; p = \sqrt{\frac{3c_1 V_0^{1/a}}{(1-a)}} \quad (36)$$

А решение для метрических коэффициентов следующее:

$$e^{2\beta} = \begin{cases} \frac{k(c_1 V_0^{1/a})^{1/3} e^{-cx}}{2\omega_0 \text{sh } kx (\cos px)^{2/3(1-a)}}; (k > 0) \\ \frac{(c_1 V_0^{1/a})^{1/3} e^{-cx}}{2\omega_0 x (\cos px)^{2/3(1-a)}}; (k = 0) \\ \frac{k(c_1 V_0^{1/a})^{1/3} e^{-cx}}{2\omega_0 \sin kx (\cos px)^{2/3(1-a)}}; (k < 0) \end{cases} \quad e^{2\gamma} = \begin{cases} \frac{2\omega_0 (c_1 V_0^{1/a})^{1/3} \text{sh } kx}{k (\cos px)^{2/3(1-a)} e^{cx}}; (k > 0) \\ \frac{2\omega_0 (c_1 V_0^{1/a})^{1/3} x}{(\cos px)^{2/3(1-a)} e^{cx}}; (k = 0) \\ \frac{2\omega_0 (c_1 V_0^{1/a})^{1/3} \text{sinkx}}{k (\cos px)^{2/3(1-a)} e^{cx}}; (k < 0) \end{cases} \quad (37)$$

$$e^{2\alpha} = c_1 V_0^{1/a} / (\cos px)^{2(1-a)}; e^{2\mu} = (c_1 V_0^{1/a})^{1/3} \cdot \frac{1}{(\cos px)^{2(1-a)/3}}$$

Из решения (37) видно, что «кротовые норы» могут быть для всех трех случаев: 1) $k > 0$; 2) $k=0$; 3) $k < 0$, т. к. в серии интервалов $(\pi n - \frac{\pi}{2}) < px < \pi n + \frac{\pi}{2}$, где $n=0,1,2$, на концах которых $\cos px = 0$, $e^{2\beta} \neq 0$, и $e^{2\beta} \rightarrow \infty$ на указанных концах, что соответствует пространственным бесконечностям.

Наиболее наглядный вид и удобный для исследования данное решение имеет при $|k| = 2p$ и $a = -\frac{1}{2}$, что не противоречит условиям совместности (35):

$$e^{2\beta} = \begin{cases} \frac{pc_1^{1/s} \cdot e^{-cx}}{\omega_0 V_0 \cdot \text{sh } 2px \cdot \text{cos } px}; & (k > 0) \\ \frac{c_1^{1/s} \cdot e^{-cx}}{2\omega_0 \cdot V_0 \cdot \text{cos } px}; & (k = 0) \\ \frac{pc_1^{1/s} \cdot e^{-cx}}{\omega_0 V_0 \cdot \sin 2px \cdot \text{cos } px}; & (k < 0) \end{cases} \quad e^{2\gamma} = \begin{cases} \frac{\omega_0 c_1^{1/s} \cdot \text{sh } 2px}{p \cdot V_0 \cdot \text{cos } px \cdot e^{cx}}; & (k > 0) \\ \frac{2\omega_0 c_1^{1/s} \cdot x}{V_0 \cdot \text{cos } px \cdot e^{cx}}; & (k = 0) \\ \frac{\omega_0 c_1^{1/s} \cdot \sin 2px}{p \cdot V_0 \cdot \text{cos } px \cdot e^{cx}}; & (k < 0) \end{cases} \quad (38)$$

$$e^{2\alpha} = \frac{c_1}{V_0^3 (\text{cos } px)^3}; \quad e^{2\mu} = \frac{c_1^{1/s}}{V_0} \cdot \frac{e^{cx}}{\text{cos } px}$$

Из формул решения (38) видно, что при таком выборе константы k ($k=2p$) нули функции $\text{sink}x$ и $\text{cos}px$ совпадают на правых концах интервалов периодичности.

Например, в интервале $0 \leq px \leq \frac{\pi}{2}$ имеем, что $\sin 2px = \text{cos} px = 0$ при $px=0$ и $px = \frac{\pi}{2}$. При этом, когда $k < 0$, $e^{2\beta} \neq 0$ в этом интервале и $e^{2\beta} \rightarrow \infty$ на концах этого интервала, т. е. получается здесь «кротовая нора». Для остальных метрических коэффициентов, $e^{2\alpha}$, $e^{2\mu}$ и $e^{2\gamma}$, на концах этого интервала имеем:

- 1) когда $x \rightarrow 0$, то $e^{2\gamma} \rightarrow 0$; $e^{2\alpha} = \text{const}$; $e^{2\mu} = \text{const}$;
- 2) когда $px \rightarrow \frac{\pi}{2}$, то $e^{2\gamma} = \text{const}$; $e^{2\alpha} \rightarrow \infty$; $e^{2\mu} \rightarrow \infty$.

III. $V(\varphi) = V_0 (\text{shm}\varphi)^{2a}$.

Тогда условия совместности следующие:

$$a > 1; (a-1) c_1 V_0^{1/a} = \frac{3}{4} c^2 + \frac{1}{4} \text{sign } k \cdot k^2; \quad m = \sqrt{\frac{3}{2a(a-1)}}; \quad p = \sqrt{\frac{3c_1 V_0^{1/a}}{(a-1)}} \quad (39)$$

и получается соотношение $\text{shm}\varphi = \frac{1}{\text{sh } hx}$.

А решение для метрических коэффициентов следующее:

$$e^{2\beta} = \begin{cases} \frac{k}{2\omega_0} \cdot \left(c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{(\text{sh} px)^{2/s(a-1)}}{\text{sh} kx \cdot e^{cx}}; & (k > 0) \\ \frac{\left(c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (\text{sh} px)^{2/s(a-1)}}{2\omega_0 x \cdot e^{cx}}; & (k = 0) \\ \frac{k \left(c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (\text{sh} px)^{2/s(a-1)}}{2\omega_0 \cdot \text{sink} x \cdot e^{cx}}; & (k < 0) \end{cases} \quad e^{2\gamma} = \begin{cases} \frac{2\omega_0}{k} \cdot \left(c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\text{sh} kx \cdot (\text{sh} px)^{2/s(a-1)}}{e^{cx}}; & (k > 0) \\ \frac{2\omega_0 x \cdot (\text{sh} px)^{2/s(a-1)}}{\left(c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{cx}}; & (k = 0) \\ \frac{2\omega_0 \cdot \text{sink} x \cdot (\text{sh} px)^{2/s(a-1)}}{\left(c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{cx}}; & (k < 0) \end{cases} \quad (40)$$

$$e^{2\alpha} = c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} (\text{sh} px)^{2(a-1)}; \quad e^{2\mu} = \left(c_1 V_0^{\frac{1-a}{a}} \right)^{\frac{1}{3}} (\text{sh} px)^{\frac{2(a-1)}{3}} \cdot e^{cx}$$

Здесь «кротовые норы» можно получить при любом знаке константы k ($k > 0$, $k = 0$, $k < 0$) при соответствующих соотношениях между константами c , k , p .

Однако наиболее удобным для исследования и для сшивки 2-х концов «кротовой норы» с внешними плоскими пространствами является случай, когда $k < 0$.

Тогда, если взять интервал значений kx , где $x \neq 0$, а на концах которого $\text{sink}x = 0$, например, $2\pi < |k|x < 3\pi$, то внутри этого интервала $e^{2\beta} \neq 0$, и $e^{2\beta} \rightarrow \infty$ при $|k|x \rightarrow 2\pi$ и $|k|x \rightarrow 3\pi$, т. е. на обоих концах интервала получается пространственная бесконечность, и получается на указанном интервале геометрия пространства-времени «кротовой норы».

При этом для остальных метрических коэффициентов $e^{2\alpha}$, $e^{2\mu}$, $e^{2\gamma}$ на обоих устьях «кротовой норы» получают значения

- 1) $|k|x = 2\pi$; $e^{2\gamma} = 0$; $e^{2\alpha} = \text{const} \neq 0$; $e^{2\mu} = \text{const} \neq 0$
- 2) $|k|x = 3\pi$; $e^{2\gamma} = 0$; $e^{2\alpha} = \text{const} \neq 0$; $e^{2\mu} = \text{const} \neq 0$

Видно, что поскольку все метрические коэффициенты на всем интервале $2\pi < |k|x < 3\pi$ имеют конечные значения, то полученная геометрия «кротовой норы» наиболее удобна для сшивки с обоих ее концов с внешними плоскими пространствами.

Таким образом, рассмотренные конфигурации самогравитирующих нелинейных скалярных полей с данными выше потенциалами $V(\varphi)$ при наличии вихревого гравитационного поля могут образовывать «кротовые норы», но все они не имеют плоские асимптотики.

Однако среди них существуют такие, у которых все метрические коэффициенты на всем их протяжении являются конечными. Такие получающиеся «кротовые норы» наиболее удобны для сшивки их устьев с внешними плоскими пространствами.

Библиографический список

1. Кречет, В. Г. Геометрические и астрофизические эффекты вихревого гравитационного поля [Текст] / В. Г. Кречет // Известия ВУЗов. Физика. – 2007. – №10. – с. 57–61.
2. Кречет, В. Г. Пятимерная геометрическая модель гравитационно-электромагнитных взаимодействий [Текст] / В. Г. Кречет // Известия ВУЗов. Физика. – 2013. – №2. – с. 21–29.
3. Кречет, В. Г. Современные космологические данные и вращение Вселенной [Текст] / В. Г. Кречет // Известия ВУЗов. Физика. – 2005. – №3. – с. 3–6.
4. Линде, А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология [Текст] / А. Д. Линде. – М. : Изд. Наука, 1973.
5. Bronnikov K. A., Krechet V.G., Lemos J.P.S. Rotating Cylindrical Wormholes. Physical Rev-2013, D 87, p. 084051-084060.

Bibliograficheskiy spisok

1. Krechet, V. G. Geometricheskie i astrofizicheskie jeffekty vihrevogo gravitacionnogo polja [Tekst] / V. G. Krechet // Izvestija VUZov. Fizika. – 2007. – №10. – s. 57–61.
2. Krechet, V. G. Pjatomernaja geometricheskaja model' gravi-jelektroslabyh vzaimodejstvij [Tekst] / V. G. Krechet // Izvestija VUZov. Fizika. – 2013. – №2. – s. 21–29.
3. Krechet, V. G. Sovremennye kosmologicheskie dannye i vrashhenie Vselennoj [Tekst] / V. G. Krechet // Izvestija VUZov. Fizika. – 2005. – №3. – s. 3–6.
4. Linde, A. D. Fizika jelementarnyh chastic i infljacionnaja kosmologija [Tekst] / A. D. Linde. – M. : Izd. Nauka, 1973.
5. Bronnikov K. A., Krechet V.G., Lemos J.P.S. Rotating Cylindrical Wormholes. Physical Rev-2013, D 87, p. 084051-084060.