

Е. И. Смирнов, В. С. Секованов, Д. П. Миронкин

Многоэтапные математико-информационные задачи как средство развития креативности учащихся профильных математических классов

В данной работе рассмотрено многоэтапное математико-информационное задание «Исследование салфетки Серпинского», нацеленное на развитие креативности учащихся профильных математических классов средней общеобразовательной школы. Многоэтапность математико-информационного задания предполагает реальное взаимодействие естественнонаучных, информационных, гуманитарных и математических знаний в ходе исследования фрактальных объектов средствами математического моделирования. Многоэтапные математико-информационные задания (ММИЗ) являются лабораторией, в рамках которой происходит творческая математическая деятельность, компьютерное моделирование, компьютерный эксперимент, совершенствование искусства программирования и создание художественных композиций, направленных на формирование креативных качеств и компетенций школьников. При выполнении ММИЗ по фрактальной геометрии школьник выполняет четыре вида творческой деятельности: математическую, информационную, алгоритмическую и художественную. В процессе такой деятельности формируется мировоззрение, развиваются интеллектуальные операции, стимулируется конвергентное и дивергентное мышление, вырабатывается умение прогнозировать результаты математической деятельности. При этом школьники знакомятся с новыми идеями современной математики и программирования, устанавливают неочевидные связи между математическими объектами, преодолевают стереотипы мышления, формируют толерантность к новизне, повышают уровень и глубину своих знаний, что является эффективным средством формирования их креативности и компетентности, востребованных современным информационным обществом.

Ключевые слова: размерность самоподобия, фрактальное множество, фрактальная геометрия, многоэтапное математико-информационное задание, креативность личности.

E. I. Smirnov, V. S. Sekovanov, D. P. Mironkin

Multi-Stage Mathematic-Information Tasks as a Means to Develop Pupils' Creativity in Profile Mathematical Classes

In this work a multi-stage Mathematic-Information task "Research of a Sierpinski Set" aimed at development of pupils' creativity in profile mathematical classes of high comprehensive school is considered. Multistaging of a Mathematic-Information task assumes real interaction of natural-science, information, humanitarian and mathematical knowledge during research of fractal objects by means of mathematical modeling. Multi-stage Mathematic-Information tasks (MMIT) are a laboratory where is creative mathematical activity, computer modeling, computer experiment, improvement of art of programming and creation of art compositions directed onto formation of creative qualities and competences of schoolchildren. When dealing with MMIT on fractal Geometry a schoolchild carries out four types of the creative activity: mathematical, information, algorithmic and art. In the course of this activity the outlook is formed, intellectual operations are developed, the convergent and divergent thinking is stimulated, and an ability to forecast results of the mathematical activity is developed. Thus schoolchildren get acquainted with new ideas of modern Mathematics and Programming, unobvious connections between mathematical objects are established, thinking stereotypes are overcome, tolerance to novelty is formed, a level and depth of their knowledge are raised and that is an effective means of formation of their creativity and competence demanded by modern information society.

Keywords: dimension of self-similarity, a fractal set, fractal Geometry, a multi-stage Mathematic-Information task, creativity of the personality.

Современная система образования направлена на формирование высокообразованной, интеллектуально развитой личности с целостным представлением картины мира, с пониманием глубины связей явлений и процессов, представляющих данную картину. С другой стороны, программы современной школы насыщены фундаментальными учебными дисциплинами, кон-

кретные связи которых с реальной жизнью и современным развитием предмета не всегда проявляются [1, 2]. Для преодоления этого противоречия большую помощь может оказать изучение современных разделов математики, например, элементов фрактальной геометрии, в рамках элективного курса. В данной статье мы рассмотрим методику реализации многоэтапного мате-

матико-информационного задания «Исследование салфетки Серпинского» в обучении математике учащихся профильных классов.

Польский математик М. Клякля рассматривал многоэтапные математические задания для формирования творческой математической деятельности учащихся Польши в школах с углубленным изучением математики [4]. В. С. Секованов исследовал многоэтапные математико-информационные задания, нацеленные на формирование креативности студентов физико-математических специальностей университетов при обучении фрактальной геометрии [6]. При этом выяснилось, что выполнение многоэтапных математико-информационных заданий, в отличие от выполнения многоэтапных математических заданий, предполагает существенное использование информационных и коммуникационных технологий (ИКТ), без которых изучение фрактальной геометрии практически невозможно.

По мнению авторов [5, 6], многоэтапные математико-информационные задания (ММИЗ) являются лабораторией, в рамках которой происходят творческая математическая деятельность, компьютерное моделирование, компьютерный эксперимент, совершенствование искусства программирования и создание художественных композиций, направленных на формирование креативных качеств и компетенций школьников. При выполнении ММИЗ по фрактальной геометрии школьник выполняет четыре вида творческой деятельности: математическую, информационную, алгоритмическую и художественную. В процессе такой деятельности формируется мировоззрение, развиваются интеллектуальные операции, стимулируется конвергентное и дивергентное мышление, вырабатывается умение прогнозировать результаты математической деятельности. Важно подчеркнуть, что в процессе выполнения ММИЗ у школьника усиливается мотивация к освоению математических действий, развиваются рефлексивные способности, вырабатывается толерантность к инновациям, формируются эстетические и нравственные качества, что неразрывно связано с гуманизацией и гуманитаризацией математического образования [3, 7].

Рассмотрим методику реализации ММИЗ «Исследование салфетки Серпинского», выполнение которого формирует у школьников креативные качества, профессиональные и общекультурные компетенции.

Многоэтапное математико-информационное задание является полифункциональным и вы-

полняется в течение двух недель. На первой неделе проводится подготовительная работа, когда учащиеся распределяются на три группы: первой группе необходимо подготовить информацию о польском математике Вацлаве Серпинском; второй группе - найти области применения салфетки Серпинского; третьей группе - найти модификации салфетки Серпинского. Для выполнения заданий необходимо осуществить поиск и использовать любую литературу на заданную тему, а также задействовать возможности сети Интернет. Учащиеся самостоятельно организуют распределение обязанностей в группе, контроль, коммуникации и оценку получаемых результатов. Результаты своей деятельности группы должны оформить в виде презентаций: таким образом, организуется *информационная деятельность* школьников. Учитель оказывает школьникам консультативную помощь как очно, так и дистанционно, направляя работу каждой группы. Для дистанционной консультативной работы используются как электронная почта, так и социальные сервисы.

На второй неделе проводится четырехчасовое занятие в классе в форме интеллектуального соревнования между группами. Выбирается жюри (3 человека) для оценки работы команд.

Первый этап урока: для актуализации необходимых опорных предметных и информационных знаний, умений и приемов деятельности, обеспечения мотивации и принятия учащимися цели учебно-познавательной деятельности по теме занятия демонстрируется фронтальная презентация «Фракталы в природе» и проводится дискуссия по следующим вопросам:

- *какая фигура называется самоподобной?* (множества, которые можно составить из нескольких своих копий, уменьшенных в одинаковое число раз, называются самоподобными множествами). *Примеры (отрезок, прямоугольник, треугольник);*

- *как вычисляется размерность самоподобия?* (размерность самоподобия вычисляется по формуле $d = \frac{\ln M}{\ln N} = \log_N M$, где M – число копий; N – постоянный множитель, показывающий во сколько раз уменьшается оригинал);

- *найти размерности самоподобия для отрезка, треугольника (для отрезка*

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 2} = \log_2 2 = 1, \quad \text{для} \quad \text{треугольника}$$

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \log_2 4 = 2);$$

• *какие множества мы называем фрактальными?* (к фрактальным отнесем такие самоподобные множества, размерность самоподобия которых дробная).

Школьникам можно обмениваться мнениями внутри своей группы, выдвигать гипотезы, выбирать варианты ответа, организовывать верификацию результата. Свой вариант ответа оформляется на листе бумаги и сдается жюри. Затем представитель одной из групп представляет у доски свой вариант ответа.

Второй этап урока представлена выполнением лабораторной работы с элементами фронтального исследования: изучается новое фрактальное множество - *салфетка Серпинского*.

Учитель представляет алгоритм построения нового множества.

1. Возьмем правильный треугольник ABC (нулевой шаг, рис. 1а).

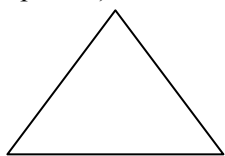


Рис. 1а

Проведем средние линии и исключим средний треугольник (первый шаг, рис. 1б).

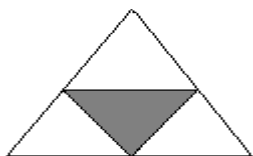


Рис. 1б

2. На втором шаге проведем средние линии трех оставшихся треугольников и в каждом исключим средние треугольники (рис. 1в).

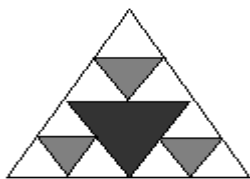


Рис. 1в

3. Повторим аналогичные действия на третьем и четвертом шаге (рис. 1г)

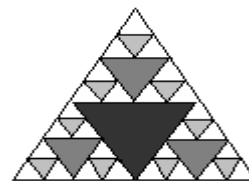


Рис. 1г

4. Продолжив процесс бесконечно, получим фигуру, которая носит название салфетка Серпинского (рис. 1д).

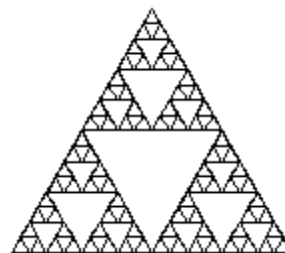


Рис. 1д

Эта фигура названа в честь известного польского математика Вацлава Серпинского. Далее организуется по группам *математическая деятельность*.

Задание первое. Является ли полученная фигура фрактальной? Ответ обоснуйте.

Учащиеся должны предложить ответ следующего содержания: фигура самоподобна, так как состоит трех копий, уменьшенных в 2 раза (доказывают, что треугольники равны).

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 2).

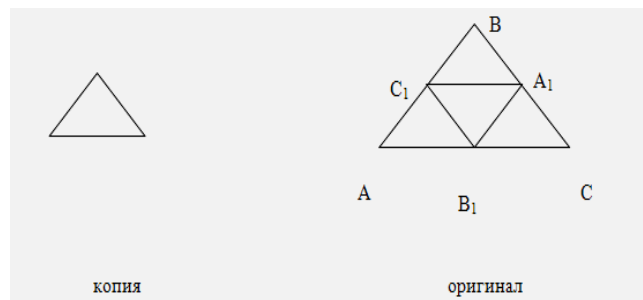
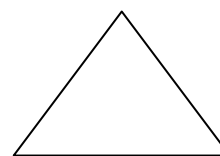


Рис. 2

Точки A_1, B_1, C_1 середины сторон BC, AC, AB соответственно.

Треугольники AC_1B_1 , C_1BA_1 , B_1A_1C и $A_1B_1C_1$ равны (по трем сторонам). Каждый треугольник является уменьшенной в 2 раза копией треугольника ABC . С помощью 3 таких копий можно составить исходную фигуру. Копии покрывают весь треугольник и пересекаются лишь в граничных точках (рис. 2).

Размерность самоподобия вычисляется по формуле: $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$

При этом школьники работают внутри своей группы. Вариант ответа оформляют на листе бумаги и сдают жюри. Затем представитель одной из групп представляет у доски свое решение.

В ходе *второго задания* проверяется выполнение домашней работы.

Школьники представляют результаты своей *информационной деятельности*. Представитель от первой группы демонстрирует презентацию о польском математике Вацлаве Серпинском, представитель от второй группы демонстрирует презентацию об области применения салфетки Серпинского, представитель от третьей группы демонстрирует презентацию о модификациях салфетки Серпинского.

На *третьем этапе* урока организуется *алгоритмическая деятельность* школьников с использованием компьютера. Учитель рассматривает алгоритм построения салфетки Серпинского:

Шаги построения фрактала:

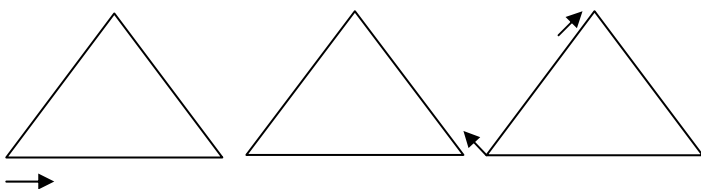


Рис 3а

Рис 3б

Рис 3в

Нарисовать наш исходный рекурсивный рисунок, но уменьшенный в два раза ($a/2$) и с глубиной рекурсии на единицу меньше ($r-1$) - первый фрагмент (рис 3а).

Переместить черепашку в соседнюю вершину и повернуть ее на 120 градусов.

Нарисовать второй фрагмент — повторить первый шаг (рис 3б).

Переместиться в соседнюю вершину и повернуться на 120 градусов. Таким образом, по отношению к следующему (третьему) фрагменту мы опять заняли «исходную» позицию.

Нарисовать третий фрагмент, повторить первый и второй шаг (рис 3в).

Третье задание школьники выполняют в группах на листочке: по данному алгоритму составьте блок-схему (рис. 4)

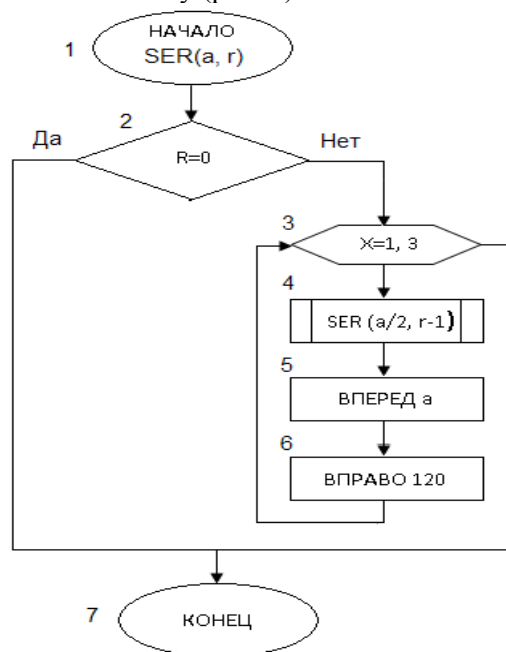


Рис. 4

Четвертое задание школьники выполняют в группах за компьютерами: реализовать алгоритм построения салфетки Серпинского в среде языка Лого.

Учащиеся должны написать следующую программу:

```
TO SER :A :R
IF :R = 0 [STOP]
REPEAT 3 [SER :A / 2 :R - 1 FD :A RT 120]
END
```

В ходе выполнения *пятого задания* организуется *художественная деятельность* школьников: используя программу построения салфетки Серпинского, создайте художественные композиции.

На экранах монитора дети демонстрируют свои художественные способности.

На *четвертом этапе* урока организуется *математическая деятельность*. Школьники, работая в группах, исследуют математические свойства нового фрактального множества. Для этого предлагаются следующие задания:

Задание шестое (выполняется по группам на листочке). Найти периметр выброшенных треугольников на первом, втором, третьем, четвертом и n -м шагах салфетки Серпинского. К чему

стремится периметр n -го шага построения салфетки при стремлении к бесконечности?

Учащиеся должны предложить следующий ответ: периметр треугольника, выброшенного на первом шаге, равен:

$$P_1 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Периметр треугольников, выброшенных на втором шаге, равен:

$$P_2 = P_1 + 3 \cdot P = \frac{3}{2} + 3 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$$

Периметр треугольников, выброшенных на третьем шаге, равен:

$$P_3 = P_2 + 9P = \frac{15}{4} + 9 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{8}\right) = \frac{15}{4} + \frac{27}{8} = \frac{57}{8} = 7,125$$

Периметр треугольников, выброшенных на четвертом шаге, равен

$$P_4 = P_3 + 27P = \frac{57}{8} + 27 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{16}\right) = \frac{57}{8} + \frac{81}{16} = \frac{195}{16} = 12,1875$$

На n -м шаге периметр определяется суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $3/2$:

$$P_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = 3 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right] \approx 3 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$\rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)

Вывод: Следовательно, периметр салфетки Серпинского в пределе бесконечен.

Задание седьмое (выполняется по группам на листочке). Найти площадь выброшенных треугольников на первом, втором, третьем, четвертом и n -м шагах салфетки Серпинского. К чему стремится площадь салфетки при « n » стремящемся к бесконечности?

Учащиеся должны предложить следующий ответ: площадь выброшенных треугольников на первом шаге:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin 60 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16} = 0,108253 \dots$$

Площадь выброшенных треугольников на втором шаге:

$$S_2 = S_1 + 3S = \frac{\sqrt{3}}{16} + 3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{64} = 0,189443 \dots$$

Площадь треугольников, выброшенных на третьем шаге, равна:

$$S_3 = S_2 + 9S = \frac{7\sqrt{3}}{64} + 9 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{64} + 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{256} = \frac{37\sqrt{3}}{256} = 0,250335 \dots$$

Площадь треугольников, выброшенных на четвертом шаге, равна:

$$S_4 = S_3 + 27S = \frac{37\sqrt{3}}{256} + 27 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{37\sqrt{3}}{256} + 27 \cdot \frac{\sqrt{3}}{512} = \frac{101\sqrt{3}}{512} = 0,34167 \dots$$

Вывод: площадь салфетки Серпинского в пределе равна 0, так как в процессе построения салфетки была исключена площадь, в точности равная площади исходного треугольника.

Задание восьмое школьники выполняют в группах на компьютерах, используя электронные таблицы. Необходимо: установить алгебраическую связь треугольника Паскаля с салфеткой Серпинского (для этого необходимо открыть файл «Задание» и на листе 1 выполнить соответствующие упражнения). Сделайте выводы.

Учащиеся должны прийти к следующему выводу: если в треугольнике Паскаля раскрасить четные числа в один цвет, а нечетные в другой, то получим визуально салфетку Серпинского.

На последнем этапе занятия, в ходе выполнения *девятого задания*, проводится рефлексивная оценка выполненных действий: сделайте вывод по лабораторной работе, ответив на следующие вопросы:

1. Является ли салфетка Серпинского фракталом? Почему?
2. Где можно использовать салфетку Серпинского?
3. Какую площадь и периметр салфетка Серпинского имеет на n -м шаге?
4. Назовите необычные свойства салфетки Серпинского: как взаимосвязана салфетка с треугольником Пифагора? Какие другие алгебраические соотношения можно выявить в рассмотрении этих объектов?

Девятое задание школьники выполняют в группах, предоставляется возможность обмениваться мнениями и презентовать свои рекомендации представителю от каждой группы.

В заключение (*на пятом этапе занятия*) слово предоставляется жюри. Подводятся итоги конкурсов.

Таким образом, при выполнении ММИЗ «Исследование салфетки Серпинского» школьники знакомятся с новыми идеями современной математики и программирования, устанавливают неочевидные связи между математическими объектами, преодолевают стереотипы мышления, формируют толерантность к новизне, повышают уровень и глубину своих знаний, что является эффективным средством формирования их креативности и компетентности, востребованных современным информационным обществом.

Библиографический список

1. Богун, В.В. Проблемы и перспективы реализации единой среды дистанционного обучения

студентов педагогических вузов [Текст] // Богун В.В., Смирнов Е.И., Кузнецов А.А.- М. : Информатика и образование. - № 7. - 2010. – С. 74-82.

2. Богун, В.В. Использование графического калькулятора в обучении математике [Текст] : учеб. пособие для вуза / В.В. Богун, Е.И.Смирнов ; М-во образования и науки РФ, Яр. гос. пед. ун-т им. К.Д.Ушинского.- Ярославль, 2008.- 230 с

3. Зубова Е.А. Критерии отбора исследовательских профессионально-ориентированных задач при обучении математике студентов инженерных вузов [Текст] / Е.А.Зубова, В.Н. Осташков, Е.И.Смирнов.- Ярославский педагогический вестник. Сер. психолого-педагогические науки. - №4. - 2008.-С.16-22

4. Клякля, М. Формирование творческой математической деятельности учащихся в классах с углубленным изучением математики в школах Польши [Текст]: дис. ... д-ра пед. наук. – М., 2003. – 285 с.

5. Миронкин, Д. П. Применение лабораторного практикума в рамках элективного курса при изучении элементов фрактальной геометрии [Текст] // Д.П. Миронкин, В.С. Секованов.- Труды VIII международных Колмогоровских чтений. - Ярославль, 2010. - С. 187-194.

6. Секованов, В. С. Обучение фрактальной геометрии как средство формирования креативности студентов физико-математических специальностей университетов [Текст] : дис. ... д-ра пед. наук. – М., 2007. – 393 с.

7. Смирнов, Е.И. Дидактическая система математического образования студентов педагогических вузов [Текст] : дис. ... д-ра пед. наук.- Ярославль, 1998.- 359 с.

Bibliograficheskij spisok

1. Bogun, V.V. Problemy i perspektivy rea-lizatsii edinoj sredy distantsionnogo obucheniya studentov pedagogicheskikh vuzov [Tekst] // Bogun V.V., Smirnov E.I., Kuznetsov A.A.- М. : Informatika i obrazovanie. - № 7. - 2010. – S. 74-82.

2. Bogun, V.V. Ispol'zovanie graficheskogo kalkulyatora v obuchenii matematike [Tekst] : ucheb. posobie dlya vuza / V.V. Bogun, E.I.Smirnov ; M-vo obrazovaniya i nauki RF, YAr. gos. ped. un-t im. K.D.Ushinskogo.- YAroslavl', 2008.- 230 s

3. Zubova E.A. Kriterii otbora issledovatel'skikh professional'no-orientirovannykh zadach pri obuchenii matematike studentov inzhenernykh vuzov [Tekst] / E.A.Zubova, V.N. Ostashkov, E.I.Smirnov.- YAroslavskij pedagogicheskij vestnik. Ser. psikhologo-pedagogicheskie nauki. - №4. - 2008.-S.16-22

4. Klyaklya, M. Formirovanie tvorcheskoj matematicheskoy deyatel'nosti uchashhikhsya v klassakh s uglublennym izucheniem matematiki v shkolakh Pol'shi [Tekst]: dis. ... d-ra ped. nauk. – М., 2003. – 285 s.

5. Mironkin, D. P. Primenenie laboratornogo praktikuma v ramkakh ehlektivnogo kursa pri izuchenii ehlementov fraktal'noj geometrii [Tekst] // D.P. Mi-

ronkin, V.S. Sekovanov.- Trudy VIII mezhdunarodnykh Kolmogorovskikh chtenij. - YAroslavl', 2010. - S. 187-194.

6. Sekovanov, V. S. Obuchenie fraktal'noj geometrii kak sredstvo formirovaniya kreativnosti studentov fiziko-matematicheskikh spetsial'nostej univer-sitetov [Tekst] : dis. ... d-ra ped. nauk. – М., 2007. – 393 s.

7. Smirnov, E.I. Didakticheskaya sistema matematicheskogo obrazovaniya studentov pedagogicheskikh vuzov [Tekst] : dis. ... d-ra ped. nauk.- YAroslavl', 1998.- 359 s.