

Е. И. Смирнов, В. С. Секованов, Д. П. Миронкин

Повышение учебной мотивации школьников в процессе освоения понятий самоподобного и фрактального множеств на основе принципа фундирования

Работа выполнена в рамках государственного задания РФ по проекту №97

Статья посвящена исследованию в школьной математике современных математических понятий самоподобного и фрактального множеств на основе принципа фундирования: вводятся и исследуются на индуктивной и экспериментальной основе конкретные проявления теоретической сущности понятий фрактальности и самоподобия с использованием размерности линейных и плоских множеств. Раскрывается методика введения данных понятий путем развертывания спиралей фундирования знаний, впервые рассмотренных и адаптированных к обучению математике Е. И. Смирновым. Используется методика работы в малых группах как эффективный инструмент познавательной активности и творческой самостоятельности обучающихся в коммуникациях. Применяется технология наглядного моделирования математических объектов, осуществляется конструирование преемственности их существенных свойств и логический анализ и оценка полученных обобщений. При этом развертываются все компоненты исследовательской деятельности.

Ключевые слова: фрактальная геометрия, концепция фундирования, самоподобное множество, снежинка Коха, салфетка Серпинского.

E. I. Smirnov, V. S. Sekovanov, D. P. Mironkin

Increase of Schoolchildren's Educational Motivation in the course of Development of Self-Similar and Fractal Sets Concepts on the Basis of the Funding Principle

This article is devoted to the research of modern mathematical concepts of self-similar and fractal sets in school Mathematics on the basis of the principle of funding. In particular, certain manifestations of the theoretical essence of concepts of fractality and self-similarity with the use of dimension of linear and flat sets are introduced and investigated on the inductive and experimental basis. The technique of introduction of these concepts by means of expansion of spirals of knowledge funding, which were for the first time considered and adapted for training Mathematics by E. I. Smirnov, are revealed. The work technique in small groups is used as an effective means of the informative activity and creative independence of students in communications. The technology of evident modelling of mathematical objects, designing of continuity of their essential properties and the logical analysis and an assessment of the received generalizations is significantly used. Thus all components of the research activity are developed.

Keywords: fractal geometry, a concept of funding, a self-similar set, Koch snowflake, the Sierpinski triangle.

Введение

В современном информационном обществе управление образовательными процессами сталкивается с новыми проблемами повышения учебной и профессиональной мотивации обучающихся при изучении сложных для освоения предметов, таких как математика, физика, русский язык, биология и др. Дело в том, что обучающиеся получают огромное количество предметной информации из СМИ, в процессе интерактивного общения, практической деятельности. Таким образом создается иллюзия знания, не подкрепленная пониманием, целостностью, межпредметными связями и взаимодействиями, создающая иногда ложное восприятие, особенно относительно сложных информационных потоков. Эта проблема особенно актуальна в профильных математических классах старшей школы, когда необходимо освоить глубо-

кие антиципационные модусы информации, которые должны стать базой и механизмом преодоления разрыва между школьным и вузовским образованием. Особенно этот разрыв проявляется в западных образовательных системах, когда большая часть выпускников средних школ не в состоянии без дополнительного образования поступить в университеты. Таким образом, сущностно необходимо проектирование и реализация элективных математических курсов, содержание и методическое обеспечение которых направлены на развитие интеллектуальных операций и личностных качеств обучаемых. Первостепенное внимание при этом должно быть направлено на развитие учебной мотивации средствами и методами современной математики, равно как и ее связей с реальной жизнью.

© Смирнов Е. И., Секованов В. С., Миронкин Д. П., 2015

Методология, методы и средства

С первых занятий элективного курса «Элементы фрактальной геометрии» школьники профильных математических классов знакомятся с понятиями «самоподобного» и «фрактального» множества. Эти понятия вводятся на основе концепции фундирования знаний и опыта личности [5]. «Фундирование – это процесс приобретения, освоения и преобразования опыта личности при создании механизмов и услови (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для актуализации и интеграции базовых учебных элементов школьных и вузовских знаний и видов деятельности с последующим теоретическим обобщением и расширением практического опыта освоения структурных единиц, раскрывающих их сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в на-

правлении профессионализации знаний и вариативности индивидуального опыта...» [5]. Так как формирование знаний, умений и навыков являются необходимым условием развития креативности учащихся, мы актуализируем данный принцип. Для этого применяем разбивку материала на логические разделы, создавая математические модули, базы данных и базы знаний. После устанавливаем порядок изучения данных тем и методику их преподавания. В каждом разделе выделяются основные понятия, идеи. Каждый элемент логически связывается с другими, следующее опирается на предыдущее и готовит к усвоению нового.

Рассмотрим данную методику на примере введения самоподобных и фрактальных множеств на основе принципа фундирования. Схемы фундирования приведены на рис. 1, 2.

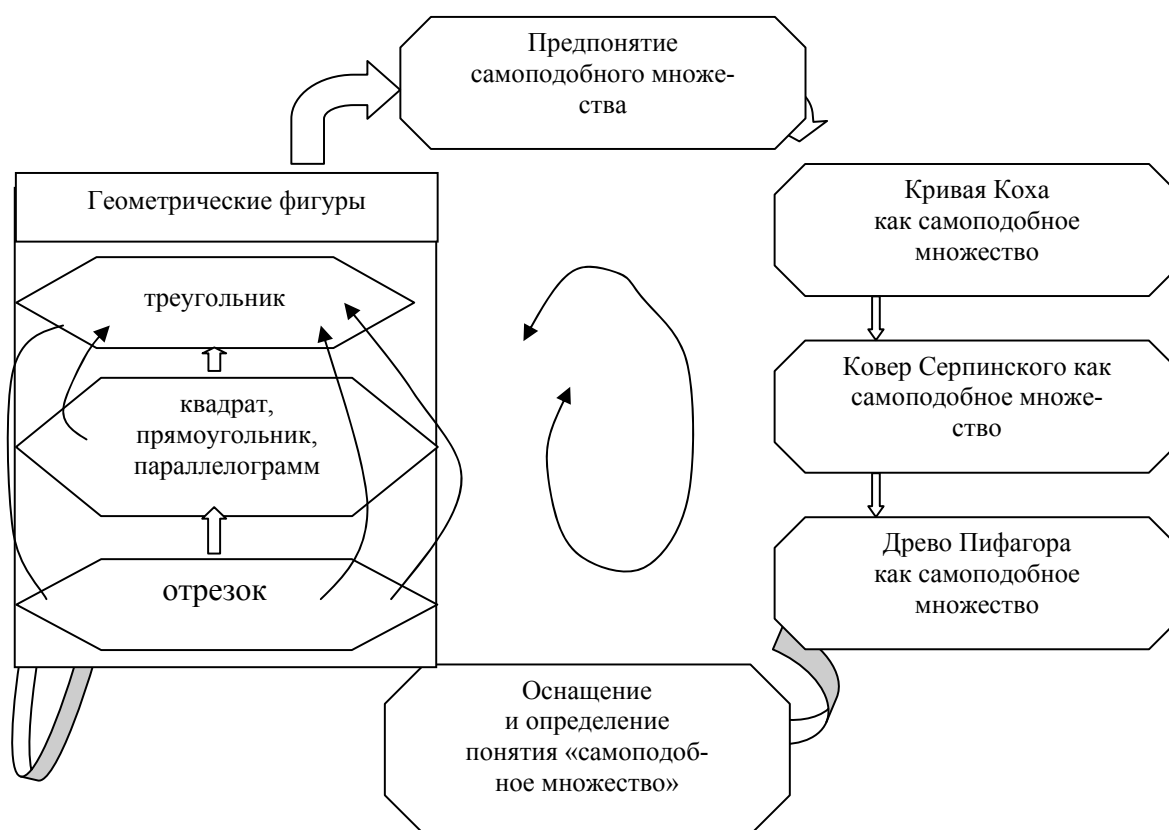


Рис. 1. Спираль фундирования понятия «самоподобное множество»

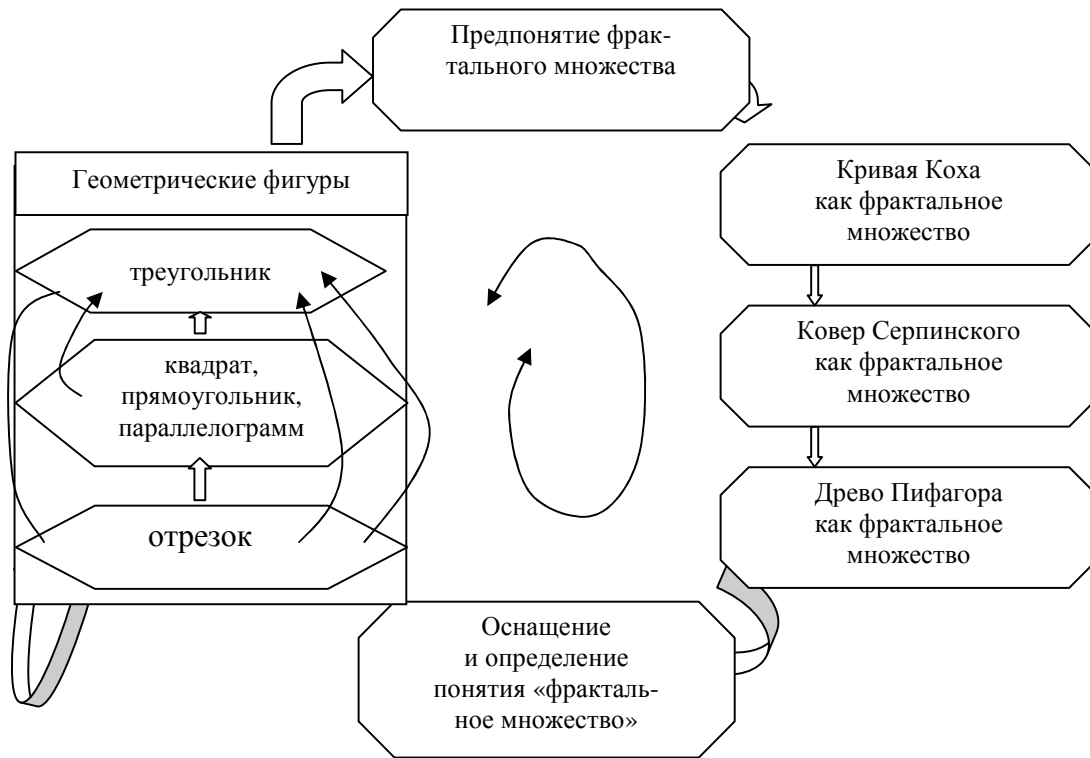


Рис. 2. Спираль фундирования понятия «фрактальное множество»

Концепция фундирования опыта личности предполагает развернутость учебной деятельности в процессе изучения элементов фрактальной геометрии, а также наличие существенной обобщенной связи в комплексе видовых проявлений учебного элемента, спиралевидной модели видовых взаимосвязей и теоретического обобщения [5].

Изучение фрактальной геометрии начинаем с рассмотрения математического понятия размерности фрактальных объектов. Исторически большое значение имеют четыре типа размерности: топологическая, самоподобия, Хаусдорфа и Минковского. Для старшеклассников физико-

математических классов средней общеобразовательной школы достаточно остановиться на рассмотрении размерности самоподобия следующим образом.

Первый этап. Разбиваем учащихся для работы [6] по группам и на базе знакомых школьнику геометрических фигур вводим значимые теоретические понятия фрактальной геометрии (самоподобное множество, размерность самоподобия), на основе которых будет разворачиваться теоретическое обобщение. Это происходит следующим образом. Рассмотрим отрезок АВ (рис. 3).

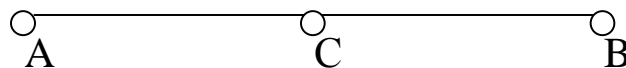


Рис. 3. Самоподобный отрезок

Пусть точка C – середина отрезка. $AC=CB$ по построению. Каждый отрезок является уменьшенной в 2 раза копией отрезка AB .

С помощью 2 таких копий можно составить отрезок AC . Копии покрывают весь отрезок и пересекаются лишь в граничных точках.

Рассмотрим треугольник ABC (Рис. 4). Точки A_1, B_1, C_1 – соответственно середины сторон $BC,$

AC, AB . Предлагаем учащимся доказать, что треугольники $AC_1B_1, C_1B_1A_1, B_1A_1C$ и $A_1B_1C_1$ равны. Школьники, работая коллективно внутри групп, должны предложить с обоснованием следующий ответ: треугольники $AC_1B_1, C_1B_1A_1, B_1A_1C$ и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

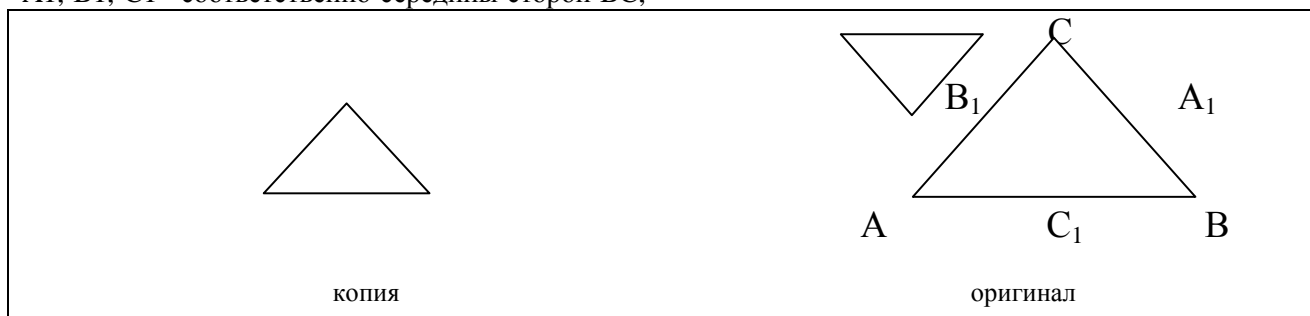


Рис. 4. Самоподобный треугольник

Учитель обобщает ответы школьников (*каждый треугольник является уменьшенной в 2 раза копией треугольника ABC ; с помощью 4 таких копий можно составить исходный треугольник; копии покрывают весь треугольник (Рис. 4) и делает вывод-гипотезу, приводящий к определению 1.*

Определение 1. Множества, которые можно составить из нескольких своих копий, уменьшенных в одинаковое число раз, называются самоподобными множествами.

Таким образом, треугольник является самоподобным множеством.

Для получения рефлексии полученного знания учащимся предлагается показать, что самоподобными будут следующие геометрические фигуры: квадрат, прямоугольник, параллелограмм. *Задания подобного рода позволяют развивать гибкость, беглость и оригинальность мышления школьника.*

Далее вводится понятие размерности самоподобия, которая вычисляется по формуле

$$d_s = \frac{\ln M}{\ln N} = \log_N M$$
, где M – число копий; N – натуральное число – знаменатель масштабируемого множителя ($r = \frac{1}{N}$).

Школьникам предлагается по группам вычислить размерности самоподобия для отрезка, треугольника, квадрата, прямоугольника, параллелограмма.

Представители учащихся от каждой группы должны предложить и презентовать ответы следующего содержания: для треугольника находим размерность самоподобия:

$d = \log_2 4 = 2, M = 4, N = 2$. Аналогично сообщают размерности самоподобия для отрезка, квадрата, прямоугольника, параллелограмма. В результате вычисления размерность самоподобия у всех перечисленных фигур оказалась целой. У школьника может появиться стереотип, что все геометрические фигуры – самоподобны. Для преодоления этого стереотипа рассматриваем круг (рис. 5). Как бы мы не уменьшали радиус копии круга (рис 5), покрыть копиями исходную фигуру нам не удастся, поэтому, круг не является самоподобным множеством.

В процессе «приобретения, освоения и преобразования опыта личности (школьника) для актуализации и интеграции базовых учебных элементов школьных знаний с последующим теоретическим обобщением...» [6] школьники знакомятся с понятием «самоподобного множества». Такой процесс называется *фундированием* и является эффективным средством преемственности обучения математике.



Рис. 5 Круг

На следующем, *втором, этапе* занятия вводим второе базовое понятие – «фрактальное множество».

Возьмем единичный отрезок АВ.

Следующий шаг – поделит отрезок АВ точками С и D на три равные части.

На отрезке CD как на основании построим правильный треугольник CDE, а потом удалим это основание. Получим ломаную ACEDB, у которой все звенья равны (рис 6).

Каждое из звеньев AC, CE, ED, DB вновь поделит на три равные части и построим на средних отрезках правильные треугольники. Затем удалим их основания.

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим кривую Коха, которая была открыта Хельге фон Кох в 1904 г. (Рис. 7).

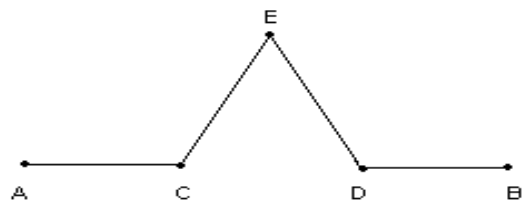


Рис. 6

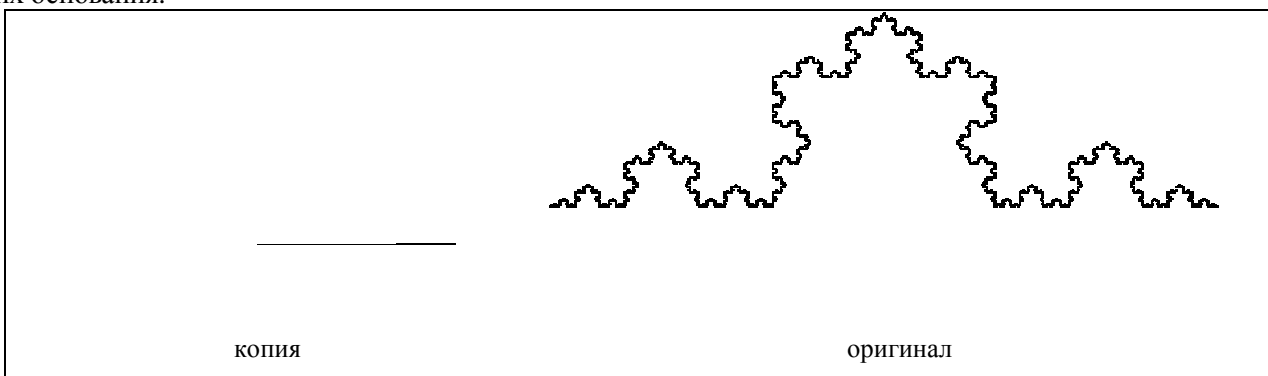


Рис. 7 Кривая Коха

Предлагаем группам обосновать, что кривая Коха – самоподобное множество. Представители групп должны предложить следующий ответ: если кривую Коха уменьшить в три раза, то мы получим фрагмент исходной кривой. С помощью четырех таких фрагментов можно покрыть копией оригинал, используя параллельный перенос и поворот на 60 градусов.

Школьникам предлагается вычислить размерность самоподобия кривой Коха. Они предлагают следующий ответ: размерность самоподобия кривой Коха вычисляется по формуле

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \log_3 4, M = 4, N = 3 \neq 1.$$

Теперь учитель на основе разворачивания цепочки эмпирических проявлений способен обсудить и сформулировать теоретическое обобщение проявляющейся сущности. Оказалось, что размерность самоподобия может быть дробной.

Определение 2. К фрактальным отнесем такие самоподобные множества, размерность самоподобия которых дробная.

Кривая Коха является фрактальным множеством. Треугольник и прямоугольник фрактальными множествами не являются. Фрактальные множества – изогнутые, изрезанные, пористые, они повсеместно встречаются в качестве моделей природных явлений, физических, экономических, общественных процессов.

Заключение

Таким образом, на основе принципа систематичности, наглядного моделирования и последовательности развертывания фундирующих конструкций вводятся понятия фрактального и самоподобного множеств.

Библиографический список

1. МIRONKIN, Д. П. Методика изучения геометрических фракталов с применением компьютера в рамках лабораторного практикума в профильных математических классах [Текст] / Д. П. МIRONKIN // Педагогическая информатика. – 2011. – № 3. – С. 9–16.
2. Секованов, В. С. Формирование креативной личности студента вуза при обучении математике на основе новых информационных технологий [Текст] / В. С. Секованов. – Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2004. – 231 с.
3. Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств [Текст]: учебное пособие / В. С. Секованов. – Четвертое, переработанное и дополненное издание. – Кострома: Из-во КГУ им. Н. А. Некрасова, 2012. – 157 с.
4. Секованов, В. С., МIRONKIN, Д. П. Изучение преобразования пекаря как средство формирования креативности студентов и школьников с использованием дистанционного обучения [Текст] / В. С. Секованов, МIRONKIN, Д. П. МIRONKIN // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова: научно-методический журнал: основной выпуск. – 2013. – Т. 19. – № 1. – С. 190–195.
5. Смирнов, Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] / Е. И. Смирнов. – Ярославль: ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 1998. – 313 с.
6. Смирнов, Е. И., Секованов, В. С., МIRONKIN, Д. П. Многоэтапные математико-информационные задачи как средство развития креативности учащихся профильных математических классов [Текст] / Е. И. Смирнов, В. С. Секованов, Д. П. МIRONKIN // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – Т. 2. – № 1. – С. 124–129.

тивности учащихся профильных математических классов [Текст] / Е. И. Смирнов, В. С. Секованов, Д. П. МIRONKIN // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – Т. 2. – № 1. – С. 124–129.

Bibliograficheskiy spisok

1. Mironkin, D. P. Metodika izuchenija geometricheskikh fraktalov s primeneniem komp'yutera v ramkah laboratornogo praktikuma v profil'nyh matematicheskikh klassah [Tekst] / D. P. Mironkin // Pedagogicheskaja informatika. – 2011. – № 3. – S. 9–16.
2. Sekovanov, V. S. Formirovanie kreativnoj lichnosti studenta vuza pri obuchenii matematike na osnove novyh informacionnyh tehnologij [Tekst] / V. S. Sekovanov. – Kostroma: KGU im. N. A. Nekrasova, 2004. – 231 s.
3. Sekovanov, V. S. Jelementy teorii fraktal'nyh mnozhestv [Tekst]: uchebnoe posobie / V. S. Sekovanov. – Chetvertoe, pererabotannoe i dopolnennoe izdanie. – Kostroma: Iz-vo KGU im. N. A. Nekrasova, 2012. – 157 s.
4. Sekovanov, V. S., Mironkin, D. P. Izuchenie preobrazovanija pekarja kak sredstvo formirovanija kreativnosti studentov i shkol'nikov s ispol'zovaniem distancionnogo obuchenija [Tekst] / V. S. Sekovanov, Mironkin D. P. Mironkin // Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N. A. Nekrasova: nauchno-metodicheskij zhurnal: osnovnoj vypusk. – 2013. – T. 19. – № 1. – S. 190–195.
5. Smirnov, E. I. Tehnologija nagljadno-model'nogo obuchenija matematike [Tekst] / E. I. Smirnov. – Jaroslavl': JaGPU im. K. D. Ushinskogo, 1998. – 313 s.
6. Smirnov, E. I., Sekovanov, V. S., Mironkin, D. P. Mnogojetapnye matematiko-informacionnye zadachi kak sredstvo razvitija kreativnosti uchashhihsja profil'nyh matematicheskikh klassov [Tekst] / E. I. Smirnov, V. S. Sekovanov, D. P. Mironkin // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2014. – T. 2. – № 1. – S. 124–129.