УДК 37

Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева

Формирование мотивационно-ценностного компонента математической подготовки будущего учителя

Статья посвящена проблеме совершенствования математической подготовки будущего учителя математики посредством заданий исследовательского характера, способствующих развитию содержательной линии целого числа, являющейся одной из основных в школьном курсе математики.

Кроме того, использование исследовательских заданий создает условия для глубокого понимания теоретических основ изучаемых в средней школе математических понятий. Формирование профессиональных компетенций в процессе изучения дисциплин профессионального цикла предполагает привитие будущему учителю навыков в организации самостоятельной познавательной и исследовательской деятельности.

Формированию мотивационно-ценностного компонента математической подготовки будущего учителя математики и повышению интереса к более глубокому творческому изучению математических дисциплин способствуют задачи арифметического содержания, приводящие к необходимости составления и решения уравнения или системы. В статье приведены примеры такого вида задач.

Развитию мотивационно-ценностного компонента математической подготовки будущего учителя способствуют также неопределенные (диофантовы) уравнения. Элементы теории диофантовых уравнений включены в программу классов с углубленным изучением математики, и уравнения такого вида включаются в задания математических олимпиад. В работе представлены примеры уравнений, решаемых методами теории сравнений.

Ключевые слова: мотивация, познавательная деятельность, исследовательская деятельность, целое число, делимость, сравнения, исследовательская деятельность, задачи арифметического содержания, диофантово уравнение.

G. G. Khamov, L. N. Timofeeva

Formation of the Motivational-Value Component of Mathematical Training of Future Teachers

The article is devoted to the problem of improving the mathematical training of Mathematics future teachers by means of tasks of the research character, contributing to the development of a meaningful line of the whole number, which is a major one in the school Mathematics course. In addition, the use of research tasks creates conditions for deep understanding of the theoretical foundations of the study in the secondary school mathematical concepts. The formation of professional competences in the process of studying disciplines of the professional cycle assumes that a future teacher will have skills in organization of independent educational and research activities.

Formation of the motivational-value component of mathematical training of Mathematics future teachers and increasing the interest in deeper creative mathematical studies contribute to the arithmetic task content, resulting in the need to write and solve equations or systems. The article gives examples of this kind of tasks.

Uncertain (Diophantine) equations contribute to the development of the motivational-value component of future teachers' mathematical training. Elements of the theory of Diophantine equations are included into the programme of classes with profound study of mathematics, and equations of this type are included into the tasks of mathematical Academic Olympics. The paper presents examples of equations solved by methods of the theory of congruences.

Keywords: motivation, cognitive activity, research activity, a whole number, divisibility property, comparison, research, sums of the arithmetic content, the Diophantine equation.

Одной из основных целей профессионального образования является подготовка компетентного работника, свободно владеющего своей специальностью, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности. В связи с этим в процессе подготовки специалиста возникает необходимость формирования мотивационно-ценностного компонента при изучении дисциплин профессионального цикла, а также навыков организации самостоятельной познавательной деятельности [1, 2]. Познавательные умения выполняют широкие функции: от владения системой операций и приемов умственной деятельности, формирования умственных способностей, развития способов деятельности до развития качеств личности и мотивов деятельности.

Математика, в силу своей высокой абстракции, постоянно требует формирования у учащихся мотивов к ее изучению. Это особенно важно при подготовке будущего учителя математики, так как в настоящее время у студентов наблюдается снижение интереса к более глубокому, творческому изучению математических дисциплин.

Рассмотрим возможности формирования мотивационно-ценностного компонента на примере теоретико-числового материала. Содержательная линия числа является одной из основных в школьном курсе математики. У студентов накоплен достаточно большой запас знаний и определенный опыт работы с числами для анализа предоставленных преподавателем теоретических фактов, самостоятельного обнаружения этих фактов. Поэтому в процессе исследования студенты могут не только самостоятельно выдвигать гипотезы, но и определять их состоятельность, предлагая метод проверки. Следовательно, формирование мотивационно-ценностного компонента вполне может осуществляться посредством заданий исследовательского характера. Один из видов такого типа заданий – задачи арифметического содержания. Приведем некоторые примеры.

Разность между двузначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найдите эти числа.

Из условия задачи следует уравнение $(10x+y)-(10y+x)=N^2 \Leftrightarrow 9(x-y)=N^2$. Отсюда $1 \le x-y \le 8] \, [$ и $x-y=v^2$, тогда

$x-y=1$ или $x-y=4$. Искомые числа 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 51, 62, 73, 84, 95.

Найдите наименьшее положительное число, умножив на которое число 29, получим произведение, оканчивающееся числом 2015.

Находим решения уравнения

$$29x-10^4 y=1: \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x=10^4 t+2069 \\ y=29t+6 \end{cases}$$

и выбираем из них наименьшее положительное значение $x=2069$ при $t=0$. Из уравнения (1) следует, что число $29x$ при $x=2069$ имеет последние четыре цифры, равные 0001, то есть $29x=60001$. Тогда искомое наименьшее натуральное число $N=x\cdot 2015$, то есть $N=4169035$ и $29N=120902015$.

Необходимо распределить 2015 единиц товара по пакетам вместимостью 7, 8, 9 единиц, при этом количество пакетов вместимостью 7 единиц должно быть более 100, 8 – более 100, 9 – более 50. Определите необходимое число пакетов при максимально возможном количестве пакетов наибольшей вместимости.

Обозначая x число пакетов вместимостью 7 единиц, y – 8, z – 9, получаем уравнение $7x+8y+9z=2015$, решения которого находятся по формулам: $\begin{cases} x=281+z-8t \\ y=-2z+7t+6 \end{cases}$, t – натуральное число. Так как $x \ge 100$, $y \ge 100$, $z \ge 50$, то из уравнения получаем $50 \le z \le 57$. Проверяя возможные варианты, находим ответ: $x=103$, $y=101$, $z=54$.

Существует двенадцать путей из пункта А в пункт В, включая те, которые идут через пункт С, и пятнадцать путей из пункта А в пункт С, считая те, которые идут через пункт В. Найдите число различных путей между каждыми двумя пунктами.

Обозначаем x – число путей из А в В без захода в С; y – число путей из В в С без захода в А; z – число путей из А в С без захода в В. Получаем систему:

$$\begin{cases} x+yz=12 \\ xy+z=15 \end{cases}.$$

Вычитая из второго уравнения системы первое, получаем уравнение $(x-z)(y-1)=3$. Так как $y>0$, возможно два варианта: $y=2$ или $y=4$. Ответ: $x=6$, $y=2$, $z=3$.

Может ли сумма 2015 натуральных чисел быть равна их произведению?

Из условия задачи имеем уравнение $x_1+x_2+\ldots+x_{2015}=x_1x_2\ldots x_{2015}$.

Для поиска ответа уменьшаем количество переменных, полагая $x_3=x_4=\ldots=x_{2015}=1$, получаем уравнение $x_1+x_2+2013=x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)=2014$. Варианты ответа: (2015, 2, 1, 1, …, 1); (1008, 3, 1, 1, …, 1); (107, 20, 1, 1, …, 1); (54, 39, 1, 1, …, 1).

Найдите наибольшее целое число x, при котором число $4^{15}+4^{2015}+4^x$ является полным квадратом.

Составляем уравнение $4^{15}+4^{2015}+4^x=y^2 \Leftrightarrow 1+4^{2000}+4^u=v^2$, где $u=x-15$, $y=2^{15}v$. Преобразуем последнее уравнение $1+4^{2000}+4^u=v^2 \Leftrightarrow 1+4^{2000}=(v-2^u)(v+2^u)$. Отсюда

$$v+2^u \le 1+4^{2000}; \qquad (2)$$

$$v-2^u \ge 1 \Rightarrow v \ge 2^u+1 \Rightarrow v+2^u \ge 2\cdot 2^u+1. \qquad (3)$$

Из неравенств (2), (3) следует $1+4^{2000}\ge 2\cdot 2^{u}+1 \quad \Leftrightarrow \quad 4^{2000}\ge 2^{u+1} \quad \Rightarrow$ $4000\ge u+1 \quad \Rightarrow \quad u\le 3999$. Поэтому $x=u+15\le 4014$ и наибольшее целое значение $x=4014$, при этом $4^{15}+4^{2015}+4^{4014}=\left[2^{15}\left(1+2^{3999}\right)\right]^{2}$.

Важнейшее значение в изучении целых чисел имеет теория сравнений. Ее взаимосвязь с теорией делимости позволяет многие задачи, исследуемые методом остатков, легко решать с помощью сравнений, что способствует повышению мотивации при изучении этой теории.

Рассмотрим некоторые задачи.

Найдите целочисленные значения x, при которых числа вида $17x^2-6x-2015$ делятся на 8.

Составляем сравнение $17x^2-6x-2015\equiv 0(\mathrm{mod}\,8) \quad \Leftrightarrow$ $x^2+2x+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,8) \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)\\ x+1\equiv 4(\mathrm{mod}\,8)\end{array}\right.$.

Ответ: $x=8t+3$, $x=8t+7$, t – целое число.

Найдите целые значения x, при которых числа вида:

а) $29x^3-18x^2+31x-2015$ делятся на 7;

б) $27x^3-20x^2-x-2015$ делятся на 13.

а)

$29x^3-18x^2+31x-2015\equiv (x+1)^3\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$.

Ответ: $x=7t-1$, t – целое число.

б)

$27x^3-20x^2-x-2015\equiv x^3+6x^2+12x\equiv 0(\mathrm{mod}\,13)$, тогда $x^3+6x^2+12x+8\equiv 8(\mathrm{mod}\,13)$, то есть $(x+2)^3\equiv 8(\mathrm{mod}\,13)$.

Ответ: $x_1=13t$, $x_2=13t+3$, $x_3=13t+4$, t – целое число.

Может ли натуральное число вида $9x+2015$ быть натуральной степенью числа 8?

Составляем уравнение $9x+2015=8^n$. (4)

Так как $9x+2015\equiv 8(\mathrm{mod}\,9)$, то из уравнения (4) следует $8^n\equiv 8(\mathrm{mod}\,9)$, что выполняется при $n=2t+1$, $t\ge 0$. Тогда $x=\dfrac{8^{2t+1}-2015}{9}$.

Например, при $t=2$, $x=3417$ и число $9x+2015=32768=8^5$.

Найдите целые значения x, при которых число вида $9x^3+5x^2-6x-1$ является полным квадратом.

Составляем уравнение

$$9x^3+5x^2-6x-1=y^2 \Leftrightarrow$$
$$x\left(9x^2+5x-6\right)=y^2+1. \qquad (5)$$

Исследуем полученное уравнение по модулю 4: $x\left(9x^2+5x-6\right)\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ при $x\equiv 0;1;2\ (\mathrm{mod}\,4)$; $y^2+1\equiv 1;2\ (\mathrm{mod}\,4)$. Отсюда следует, что x – число вида $4t+3$. Из уравнения (5) имеем: y^2+1 делится на x, число x делится на простое число вида $p=4t+3$. Так как сумма квадратов a^2+b^2 делится на простое число $p=4t+3$ тогда и только тогда, когда оба числа a и b делятся на p, то y^2+1 делится на $p=4t+3$ лишь при $t=-1$.

Ответ: $x=-1$.

В четырехзначном числе цифры десятков и единиц равны. Найдите среди них числа, равные сумме квадратов двух двузначных чисел, образованных двумя первыми и двумя последними цифрами числа.

Из условия задачи имеем уравнение

$$1000x+100y+10z+z=(10x+y)^2+(10z+z)^2 \ (6)$$

Перейдя к сравнению по модулю 10, получим

$$y^2+z^2\equiv z(\mathrm{mod}\,10) \qquad (7)$$

При $y=0$, $z=1;5;6$. Подставляя в уравнение (6), убеждаемся, что решений нет.

Так как y^2; $z^2\equiv 1;4;9;6;5\ (\mathrm{mod}\,10)$ при y; $z\equiv 1;9;2;8;3;7;4;6;5\ (\mathrm{mod}\,10)$, то сравнение (7) возможно лишь при $z=2;8;3$. Тогда из уравнения (6) имеем: $(10x+y)[100-(10x+y)]=462;\,7656;\,1056$.

Целые решения при $z=3$:

$1233=12^2+33^2$, $8833=88^2+33^2$.

Для формирования мотивационно-ценностного компонента будущего учителя математики и развития линии целого числа большое значение имеют диофантовы уравнения, прежде всего потому, что элементы этой теории включены в программы классов с углубленным изучением математики и уравнения такого вида нередко включаются в задания математических олимпиад, Единого государственного экзамена по математике. Кроме того, решение многих уравнений требует от обучаемого освоения новых знаний и определенной исследовательской деятельности [3, 4]. Некоторые примеры:

Уравнение $x^2+xy+y^2=2015$ неразрешимо в целых числах.

$x^2+xy+y^2=2015 \Leftrightarrow (x-y)^2+3xy=2015$.

Переходим к сравнению по модулю 3:

$(x-y)^2 \equiv 2 \pmod 3$, что невозможно.

Для нахождения целочисленных решений уравнения $36x^2+23x+2015=7y$ переходим к сравнению по модулю 7:

$36x^2+23x+2015 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$

$x^2+2x+6 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow (x+1)^2 \equiv 2 \pmod 7$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{array}\right.$.

Множество решений:

$\begin{cases} x=7t+2 \\ y=252t^2+167t+315 \end{cases}$;

$\begin{cases} x=7t+3 \\ y=252t^2+239t+344 \end{cases}$, t – целое число.

$7x^3+9x^2-3x+2015=6y$.

Переходим к сравнению по модулю 6:

$7x^3+9x^2-3x+2015 \equiv 0 \pmod 6 \Leftrightarrow$

$x^3+3x^2+3x+5 \equiv 0 \pmod 6 \Leftrightarrow$

$(x+1)^3 \equiv 2 \pmod 6 \Leftrightarrow x+1 \equiv 2 \pmod 6 \Leftrightarrow$

$x \equiv 1 \pmod 6$. Таким образом, $x=6t+1$, t – целое число.

Решения уравнения:

$\begin{cases} x=6t+1 \\ y=252t^3+180t^2+36t+338 \end{cases}$, t – целое число.

$8x^3-x^2+19x+2015=21y^3$.

Переходим к сравнению по модулю 7:

$8x^3-x^2+19x+2015 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2+12x+6 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow$

$(x+2)^3 \equiv 2 \pmod 7$. Полученное сравнение решений не имеет, поэтому заданное уравнение в целых числах неразрешимо.

Уравнение $x^{10}-y^{10}=2015$ целых решений не имеет. В силу теоремы Ферма $x^{10}-y^{10} \equiv 0; \pm 1 \pmod{11}$, а $2015 \equiv 2 \pmod{11}$.

Уравнение

$x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6=2015$ (8)

целых решений не имеет.

Если $x \equiv y \pmod 7$, то левая часть уравнения делится на 7, а правая не делится. Если $x \not\equiv y \pmod 7$, то по теореме Ферма и (8)

$x^7-y^7 \equiv x-y \pmod 7 \Leftrightarrow$

$2015(x-y) \equiv (x-y) \pmod 7 \Leftrightarrow$

$2014(x-y) \equiv 0 \pmod 7$. Сравнение невыполнимо.

Для решения следующих уравнений используются свойства первообразных корней и индексов и соответствующие таблицы.

Решениями уравнения $x^2=19y+2015$ является множество чисел $\begin{cases} x=19t \pm 1 \\ y=19t^2 \pm 2t-106 \end{cases}$, t – целое, знак в формулах одинаков.

Для решения уравнения переходим к сравнению по модулю 19: $x^2 \equiv 1 \pmod{19}$. Далее индексируем обе части $2\,ind\,x \equiv 0 \pmod{18} \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} ind\,x \equiv 0 \pmod{18} \\ ind\,x \equiv 9 \pmod{18} \end{array}\right.$. По таблице антииндексов находим значения для переменной x, подставляя найденные формулы в уравнение, находим соответствующие значения для переменной y.

$20x^2-15x=19y+2015$.

Решения: $\begin{cases} x=19t+7 \\ y=380t^2+265t-60 \end{cases}$,

$\begin{cases} x=19t+8 \\ y=380t^2+305t-45 \end{cases}$, t – целое.

$17x^2=41y+2015$. Решения $\begin{cases} x=41t \pm 16 \\ y=697t^2 \pm 544t+57 \end{cases}$, t – целое, знак в формулах одинаков.

$x^3-17y=2015$.

Множество решений:

$\begin{cases} x=17t-2 \\ y=289t^3-102t^2+12t-119 \end{cases}$, t – целое.

$x^3-20x^2+26x=23y+2015$.

Множество решений:

$$\begin{cases} x = 23t - 3 \\ y = 529t^3 - 667t^2 + 173t - 100 \end{cases},\ t \text{ – целое.}$$

$3^x - 2015 = 17y$. Множество решений: $\begin{cases} x = 16t + 2 \\ y = \dfrac{3^{16t+2} - 2015}{17} \end{cases}$, $t \ge 0$, в частности, $x = 2$, $y = -118$.

$19x^3 - 17y^3 = 2015$. Исследовать по модулю 19. Целых решений нет.

Представленные задачи и примеры, в основном нестандартные, позволяют разнообразить содержание изучаемого материала, а их использование способствует более глубокому, творческому подходу к изучению теории делимости и сравнений.

Библиографический список

1. Деза, Е. И. Подготовка учителя математики в условиях вариативного образования [Текст] : монография / Е. И. Деза ; под ред. В. Л. Матросова. – М. : Прометей, 2012. – 176 с.
2. Смирнов, Е. И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога [Текст] : монография / Е. И. Смирнов – Ярославль : Изд-во ЯГПУ им. К. Д. Ушинского, 2012. – 646 с.
3. Хамов Г. Г., Тимофеева Л. Н. Формирование исследовательских компетенций будущих учителей математики при изучении теоретико-числового материала [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Ярославский педагогический вестник. – 2013. – № 3. – С. 141–146.
4. Хамов, Г. Г., Тимофеева, Л. Н. О методах составления некоторых типов задач и их использования как средства организации исследовательской деятельности студентов [Текст] / Г. Г. Хамов, Л. Н. Тимофеева // Наука и школа. – 2014. – № 1. – С. 48–51.

Bibliograficheskij spisok

1. Deza, E. I. Podgotovka uchitelja matematiki v uslovijah variativnogo obrazovanija [Tekst] : monografija / E. I. Deza ; pod red. V. L. Matrosova. – M. : Prometej, 2012. – 176 s.
2. Smirnov, E. I. Fundirovanie opyta v professional'noj podgotovke i innovacionnoj dejatel'nosti pedagoga [Tekst] : monografija / E. I. Smirnov – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU im. K. D. Ushinskogo, 2012. – 646 s.
3. Hamov G. G., Timofeeva L. N. Formirovanie issledovatel'skih kompetencij budushhih uchitelej matematiki pri izuchenii teoretiko-chislovogo materiala [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Jaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2013. – № 3. – S. 141–146.
4. Hamov, G. G., Timofeeva, L. N. O metodah sostavlenija nekotoryh tipov zadach i ih ispol'zovanija kak sredstva organizacii issledovatel'skoj dejatel'nosti studentov [Tekst] / G. G. Hamov, L. N. Timofeeva // Nauka i shkola. – 2014. – № 1. – S. 48–51.