ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ

УДК 37

Н. Н. Новоселова, А. В. Ястребов

Эксперимент как основа методики формирования понятия «порядок бесконечно большой величины»

Статья посвящена методике формирования первоначальных представлений учащихся профильной математической школы о порядке бесконечно большой величины. В работе рассмотрены содержательно-методические линии математики и выявлена связь числовой и функциональной линий: как и к числам, к элементам функциональной линии (функциям) можно применить операцию сравнения. Определено множество сравниваемых функций и критерий их сравнения – порядок роста. Указан метод сравнения порядков роста бесконечно больших величин, сформулирована система определений, приведены примеры заданий для обоснования введенной системы. Показано, что средством формирования представлений о порядке роста бесконечно большой величины служит исследование функций средствами экспериментальной математики с помощью интерактивной математической среды. Предложенный способ является доступным и посильным для учащихся, в то время как традиционный (аналитический) способ сравнения и его приемы, приводимые в курсе математического анализа, могли бы оказаться малодоступными или даже совсем непонятными.

Ключевые слова: профильная школа, порядок бесконечно большой величины, первоначальное представление, методика, математический эксперимент.

THEORY AND METHODOLOGY OF TRAINING AND EDUCATION

N. N. Novoselova, A. V. Yastrebov

Mathematical Experiment as a Base for the Method of Formation of the Concept «Infinite Quantity Growth Rate»

The article is devoted to the method of formation of the initial notions about the infinite quantity growth rate of pupils in mathematical high school. Here are considered substantial and methodical lines of Mathematics and is revealed the connection between numerical and functional lines in this paper: it is possible to use the comparison for elements of the functional line (to functions) as for numbers. The set of functions is defined along with the criteria of comparison, which is a growth rate. There is pointed the comparison method of the infinite quantity growth rate, is stated the system of definitions, are given the examples for justification of that system. Here is shown that the method of formation of these notions is the research of functions by means of Experimental Mathematics using the interactive mathematical software. This method is available and adequate for pupils, whereas the traditional (analytical) comparison method and its procedures of the Mathematical Analysis could be inaccessible or even unintelligible.

Keywords: profession-oriented school, infinite quantity growth rate, initial notions, method, mathematical experiment.

Хорошо известно [1, с. 148; 6, с. 35–36; 8; 10, с. 397], что изучение математики в средней школе группируется вокруг нескольких содержательно-методических линий: 1) числа и вычисления; 2) выражения и их преобразования; 3) уравнения и неравенства; 4) функции; 5) геометрические фигуры и измерение геометрических величин; 6) стохастика. Очевидно, что эти линии находятся в тесном взаимодействии. В нашей работе мы сосредоточимся на взаимодействии двух из них, а именно на взаимодействии числовой и функциональной линий.

Одним из важных умственных действий, которые выполняют школьники при изучении чисел, является сравнение. Прежде всего учащиеся начальной школы сравнивают числа в пределах первого десятка. Затем, при изучении многозначных чисел, школьники учатся сравнивать числа в связи с цифрами разных разрядов. Например, они понимают, что первое из чисел вида $\boxed{8}\boxed{}$ и $\boxed{9}\boxed{}$

всегда меньше второго, независимо от того, какие цифры стоят в пустых рамках. Другим примером того же типа является решение неравенства $\boxed{}\boxed{} > \boxed{8}\boxed{7}$, для которого существует всего несколько ответов: 9 в разряде десятков и любая цифра в разряде единиц, а также 88 и 89. Далее школьники учатся сравнивать дроби с одинаковыми знаменателями и одинаковыми числителями [2, с. 175], а затем учатся сравнивать десятичные дроби [3, с. 59]. Наконец, школьники осваивают два теоретических способа сравнения чисел. Первый из них является универсальным и связан с операцией вычитания: по определению $a < b$, если $a - b < 0$. Второй способ применяется только к положительным числам и связан с делением: $a < b$ тогда и только тогда, когда $\frac{a}{b} < 1$.

Естественно попытаться применить операцию сравнения для функций или каких-либо классов функций. Сразу оговоримся, что сравнение функций во многих случаях является неестественным или даже невозможным. Например, крайне трудно придумать метод сравнения синуса и косинуса. Тем не менее, в школе изучается достаточно длинный список функций, которые являются монотонно возрастающими, бесконечно большими и положительными на луче вида $[a, +\infty)$. Таковы, например, линейная функция с положительным угловым коэффициентом, квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом, степенная функция, показательная и логарифмическая функции (две последние с основанием, бóльшим единицы). Сосредоточимся на сравнении таких функций.

Известно, что полномасштабное, регулярное сравнение бесконечно больших функций осуществляется в курсе математического анализа [7, с. 112–116] чисто аналитическим путем с использованием теории пределов, дифференциального исчисления, в частности, с использованием правила Лопиталя. Использование сложной техники изучения бесконечно больших величин недоступно (или малодоступно) для школьников. Между тем было бы вполне естественным сформировать у школьников, особенно у учащихся профильных математических школ, представление о том, что две бесконечно большие величины могут расти с одинаковой скоростью, с разными скоростями, могут иметь разный порядок скорости роста и т. п.

Отмеченное противоречие может быть разрешено в рамках экспериментальной математики. Такой подход является вполне естественным, поскольку в настоящее время в педагогическом обществе начинает формироваться представление об экспериментальной математике как о содержательно-методологической линии школьного курса математики [9], а сама возможность экспериментирования служит одной из основ исследовательского обучения [10]. Кроме того, педагогические возможности экспериментальной математики обсуждались и были внесены в резолюцию III Всероссийского съезда «Школьное математическое образование» как новый подход к изучению математики [5]. В данной статье предпринята попытка создания методики формирования понятия «порядок бесконечно большой величины» с помощью интерактивной математической среды (ИМС).

Прежде всего проектировщик методики должен выбрать *метод сравнения* двух бесконечно больших функций. Выбор невелик, поскольку в процессе сравнения двух функций можно составить либо их разность, либо их частное, а затем анализировать полученный результат. Покажем, что *использование вычитания при сравнении двух бесконечно больших величин оказывается неудобным в самых разных смыслах, а использование деления – удобным.*

Первая причина неудобства в использовании разности носит, условно говоря, аппаратный характер. Дело в том, что при составлении разности функций и просмотра графика разности утрачивается значительная часть визуальной информации. Пусть, например, мы сравниваем бесконечно большие функции $f(x) = 2^x$ и $g(x) = x^2$ и составляем их разность $\varphi(x) = 2^x - x^2$. Совсем нетрудно отдать команду ИМС GeoGebra построить график функции $\varphi(x)$, однако попытка школьника увидеть график функции в окрестности значения аргумента $x_0 = 20$ (отнюдь не большое число!) приведет к тому, что оси исчезнут из поля зрения, на экране появятся *написанные* координаты диагональных углов экрана, а график превратится в прямую, визуально неотличимую от вертикальной. Совсем иную картину увидит школьник, если мы составим частное исходных функций $\psi(x) = x^2/2^x$ и построим график функции $\psi(x)$. Здесь становится очевидным, что с ростом аргумента значения частного функций становятся все меньше и меньше и практически не отличаются от нуля (рис. 1). Получается, что числитель и знаменатель дроби растут и стремятся к бесконечности, а сама дробь уменьшается и становится бесконечно малой. На интуитивном уровне понятно, что знаменатель растет «быстрее» числителя.

Вторая причина неудобства в использовании разности носит содержательный характер. Прежде всего, часто встречаются ситуации, когда школьник в принципе не сможет получить никакой информации, которая позволяла бы ему сравнить две функции. Рассмотрим, например, две бесконечно большие возрастающие функции: $f(x) = x + \sin x$ и $g(x) = x$. Их разность $\varphi(x) = f(x) - g(x) = \sin x$ невозможно сравнить с нулем, поэтому школьник вряд ли сможет решить, растут ли эти функции с одинаковой скоростью или одна из них растет быстрее другой. Картина сильно изменится, если для сравнения скоростей роста будет использовано частное функций. Действительно, $\psi(x) = f(x)/g(x) = 1 + \frac{\sin x}{x}$, и на графике этой функции наглядно видно, что при стремлении аргумента к бесконечности значения функции стремятся к единице (рис. 2). Получается, что числитель и знаменатель дроби растут и стремятся к бесконечности, а сама дробь ограничена и приблизительно равна единице. На интуитивном уровне понятно, что скорости роста числителя и знаменателя «примерно одинаковы».

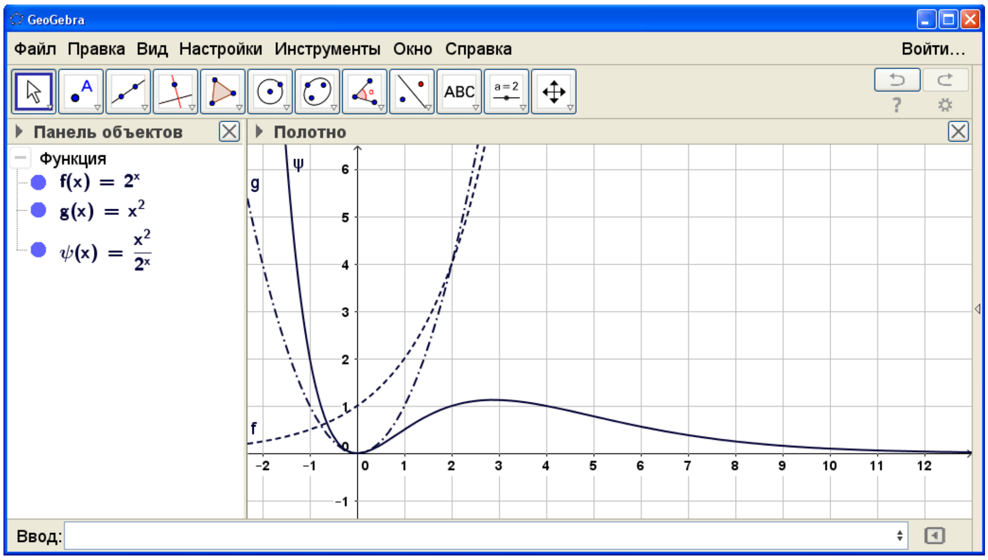

Рисунок 1

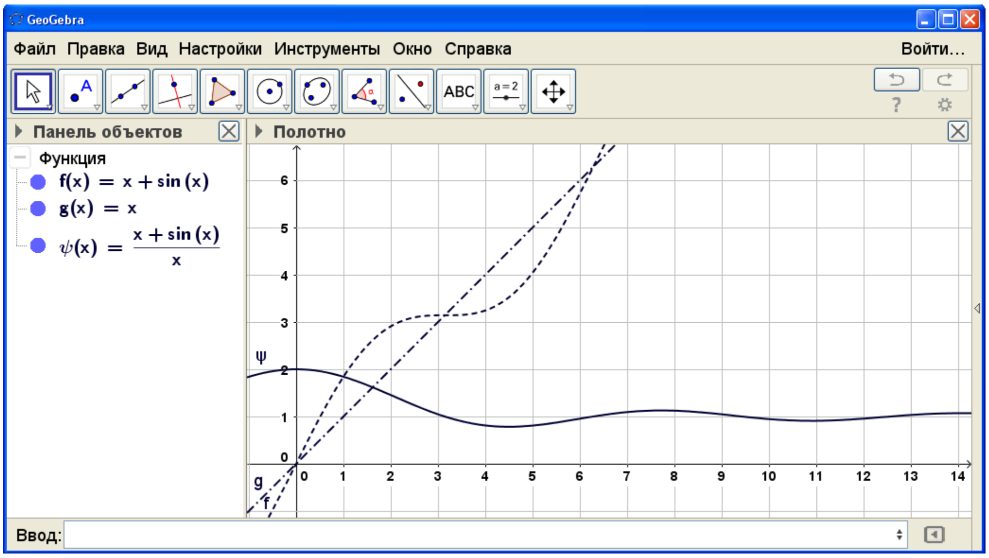

Рисунок 2

Кроме того, при использовании разности функций часто встречаются ситуации, когда информация о разности не является достаточной для какой бы то ни было интерпретации. Рассмотрим, например, три простые функции: $u(x) = x^3 + 10$, $v(x) = 2x^3$ и $w(x) = 3x^3 - 10$. Очевидно, что все три разности: $v(x) - u(x)$, $w(x) - u(x)$ и $w(x) - v(x)$ – стремятся к бесконечности. В силу идентичности информации о трех разностях школьник будет испытывать серьезные затруднения при попытке понять, в чем же разница между тремя бесконечно большими функциями. Картина сильно изменится, если для сравнения скоростей роста будет использовано частное функций. Действительно, с помощью графиков, которые легко построить с помощью ИМС, можно будет наглядно увидеть, что $\frac{v(x)}{u(x)} \to 2$, $\frac{w(x)}{u(x)} \to 3$, а $\frac{w(x)}{v(x)} \to \frac{3}{2}$. Для школьников очевидно, что информация о трех частных функций отнюдь не идентична, а кое-кто может догадаться, что в конструировании предельных значений участвуют коэффициенты при x^3.

Проделав со школьниками все вышеперечисленные несложные эксперименты, учитель может сформулировать систему **определений**:

– Две бесконечно большие функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны, если $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$, при $x \to +\infty$.

– Две бесконечно большие функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок, если $\frac{f(x)}{g(x)} \to a \neq 0$, при $x \to +\infty$.

– Две бесконечно большие функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют разный порядок, если $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$, при $x \to +\infty$. При этом $g(x)$ является бесконечно большой функцией более высокого порядка, чем $f(x)$.

– Две бесконечно большие функции $f(x)$ и $g(x)$ несравнимы, если отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ не имеет предела.

Предложим несколько заданий, с помощью которых может быть выявлена математическая и педагогическая целесообразность работы с приведенной системой определений.

Задание 1. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = 2x + 3$ и $g(x) = 4x + 8$.

Обсуждение. С помощью построения графиков в ИМС нетрудно продемонстрировать, что $\frac{g(x)}{f(x)} \to 2 = \frac{4}{2} \neq 1$. Применяя определения, мы видим, что изучаемые функции являются неэквивалентными бесконечно большими функциями одного порядка.

Проделав достаточное количество экспериментов с различными линейными функциями, школьники могут естественным образом прийти к следующей **гипотезе:** для двух линейных функций $u(x) = ax + b$ и $v(x) = cx + d$ с положительными угловыми коэффициентами имеет место соотношение $\frac{u(x)}{v(x)} \to \frac{a}{c} \neq 0$. *Если* эта гипотеза справедлива, то школьники могут сделать два вывода – математический и физический.

Вывод 1, математический. Все непостоянные линейные функции имеют одинаковый порядок роста.

Пусть аргумент x имеет физический смысл времени, а функция $u(x)$ – физический смысл координаты материальной точки на прямой. Тогда формула $u(x) = ax + b$ является законом движения тела со скоростью a и начальной координатой b. Физическая интерпретация математической формулы позволяет прийти к следующему выводу.

Вывод 2, физический. Все законы прямолинейного равномерного движения тела являются бесконечно большими величинами одного порядка.

Заметим, что, говоря о справедливости гипотезы, мы употребили и подчеркнули слово «если». Дело в том, что сколь бы убедительны ни были проведенные эксперименты, утверждение гипотезы пока не получило дедуктивного доказательства. Хотя такое доказательство вряд ли уместно в школе, сама формулировка гипотезы дает школьникам перспективы для дальнейшего изучения анализа. Впрочем, в математической школе всегда найдется группа учащихся, для которых дедуктивное доказательство окажется вполне посильным.

Задание 2. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = 10x^2 + 3x - 7$ и $g(x) = 5x^2 - 18x + 1$.

Обсуждение. С помощью построения графиков в ИМС нетрудно продемонстрировать, что $\frac{g(x)}{f(x)} \to \frac{1}{2} = \frac{5}{10} \neq 1$. Применяя определения, мы видим, что изучаемые функции являются неэквивалентными бесконечно большими функциями одного порядка.

Проделав достаточное количество экспериментов с различными квадратичными функциями, школьники могут естественным образом прийти к следующей **гипотезе:** для двух квадратичных функций $u(x) = ax^2 + bx + c$ и $v(x) = px^2 + qx + r$ с положительными старшими коэффициентами имеет место соотношение $\frac{u(x)}{v(x)} \to \frac{a}{p} \neq 0$. *Если* эта гипотеза справедлива, то школьники могут сделать два вывода – математический и физический.

Вывод 3, математический. Все квадратичные функции имеют одинаковый порядок роста.

Пусть аргумент x имеет физический смысл времени, а функция $u(x)$ – физический смысл координаты материальной точки на прямой. Тогда формула $u(x) = ax^2 + bx + c$ является законом равноускоренного движения тела с ускорением $2a$, с начальной скоростью b и начальной координатой c. Физическая интерпретация математической формулы позволяет прийти к следующему выводу.

Вывод 4, физический. Все законы прямолинейного равноускоренного движения тела являются бесконечно большими величинами одного порядка.

Задание 3. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = \log_b x$, где $1 < a < b$.

Обсуждение. Данную задачу естественно решать двумя способами: экспериментально, как мы делали раньше, и теоретически, на основании формулы $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$. С помощью формулы мы легко получим, что $\frac{g(x)}{f(x)} = \log_b a \neq 0$. В силу этого мы видим, что изучаемые функции являются неэквивалентными бесконечно большими функциями одного порядка. Итак, мы пришли к следующему выводу.

Вывод 5. Все логарифмические функции, основания которых больше 1, являются бесконечно большими функциями одинакового порядка.

Заметим, что мы могли бы представить физическую интерпретацию данного вывода, если бы воспользовались формулой емкости цилиндрического конденсатора. Впрочем, это увело бы нас далеко от основной линии изложения.

Приведем примеры заданий, касающихся бесконечно больших функций разных порядков.

Задание 4. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = x^\alpha$ и $g(x) = x^\beta$, где $0 < \alpha < \beta$.

Обсуждение. С помощью построения графиков в ИМС нетрудно продемонстрировать, что $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{\alpha-\beta} \to 0$. Применяя определения, мы видим, что изучаемые функции являются бесконечно большими функциями разных порядков, причем порядок функции $g(x)$ выше, чем порядок функции $f(x)$. Итак, мы обосновали следующий вывод.

Вывод 6. Две степенные функции с разными показателями являются бесконечно большими разных порядков, причем порядок функции с бóльшим показателем степени выше.

Аналогичный вывод можно сделать для двух показательных функций с разными основаниями.

Наконец, приведем примеры заданий с разнотипными функциями, направленные на формирование представления о порядке роста различных функций. Естественно, вычисление некоторых пределов отношений может оказаться весьма затруднительным для многих школьников, поскольку необходимая математическая техника не изучалась ими. Однако использование ИМС существенно облегчает для них нахождение этих пределов.

Заметим, что мы уже сравнивали порядки двух бесконечно больших функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2^x$. *Увеличим* показатель степени у первой функции, *уменьшим* основание у второй функции и решим следующую задачу.

Задание 7. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = x^5$ и $g(x) = 1{,}5^x$.

Обсуждение. С помощью построения графиков в ИМС школьникам нетрудно показать, что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5}{1{,}5^x} \to 0$. Применяя определения, они видят, что данные функции являются бесконечно большими функциями разных порядков, причем порядок функции $g(x)$ выше, чем порядок функции $f(x)$. Таким образом, школьники получают тот же самый вывод, что и для другой пары функций типа показательная – степенная. А это дает определенные основания для следующего вывода.

Вывод 7. Любая показательная функция с основанием большим единицы является бесконечно большой более высокого порядка, чем любая степенная функция с показателем большим единицы.

Задание 8. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = x^\alpha$, где $a > 1$ и $\alpha > 0$.

Обсуждение. Выполнив необходимые построения в ИМС, школьники смогут продемонстрировать, что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log_a x}{x^\alpha} \to 0$. Применяя определения, они видят, что данные функции являются бесконечно большими функциями разных порядков, причем порядок функции $g(x)$ выше, чем порядок функции $f(x)$. Таким образом, школьники приходят к следующему выводу.

Вывод 8. Любая степенная функция с показателем большим единицы является бесконечно большой более высокого порядка, чем любая логарифмическая функция с показателем бóльшим единицы.

Заметим, что мы сравнили порядки роста двух пар функций: степенной и показательной, логарифмической и степенной. Осталось сравнить порядки роста показательной и логарифмической функций.

Задание 9. Сравните порядки бесконечно больших функций $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = b^x$, где $a > 1$ и $b > 1$.

Решение 1, экспериментальное. С помощью построения графиков в ИМС школьники легко могут показать, что $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log_a x}{b^x} \to 0$. Применяя определения, они видят, что изучаемые функции являются бесконечно большими функциями разных порядков, причем порядок функции $g(x)$ выше, чем порядок функции $f(x)$.

Решение 2, теоретическое. Рассмотрим предел отношения данных функций и домножим числитель и знаменатель на $x \neq 0$. Получим $\frac{\log_a x}{b^x} = \frac{x \cdot \log_a x}{x \cdot b^x} = \frac{\log_a x}{x} \cdot \frac{x}{b^x}$, где $\frac{\log_a x}{x} \to 0$ и $\frac{x}{b^x} \to 0$. Даже школьник может на интуитивном уровне понять, что если каждый сомножитель стремится к нулю, то и все произведение стремится к нулю. Тогда отношение $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ и, по определению, порядок функции $g(x)$ выше, чем порядок функции $f(x)$.

Решив задачу двумя способами, мы пришли к одному и тому же результату, который сформулируем в виде следующего вывода.

Вывод 9. Любая показательная функция с основанием большим единицы является бесконечно большой более высокого порядка, чем любая логарифмическая функция с показателем большим единицы.

Учащимся математической школы не всегда посильно аналитическое сравнение порядков роста функций в силу незнания определенных приемов. В свою очередь, использование ИМС может позволить «увидеть» то, что было бы невозможно сделать, используя лишь лист бумаги, ручку, линейку и карандаш. Таким образом, получается, что, действуя «полукустарными» средствами, в одних случаях теоретически, в других – экспериментально, школьники могут освоить достаточно большой массив фактов, касающихся понятия «порядок бесконечно большой величины».

Библиографический список

1. Богун, В. В., Осташков, В. Н., Смирнов, Е. И. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика [Текст] : учебное пособие / В. В. Богун, В. Н. Осташков, Е. И. Смирнов ; под ред. Е. И. Смирнова. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2010. – 498 с.
2. Дорофеев, Г. В., Шарыгин, И. Ф., Суворова, С. В. и др. Математика. 5 класс [Текст] : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др. – 12-е изд. – М. : Просвещение, 2011. – 300 с.
3. Дорофеев, Г. В., Шарыгин, И. Ф., Суворова, С. В. и др. Математика. 6 класс [Текст] : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др. – 11-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 303 с.
4. Епифанова, Н. М., Шарова, О. П. Методика обучения алгебре основной школы (материалы к лекционным занятиям) [Текст] : учебно-методическое пособие / Н. М. Епифанова, , О. П. Шарова. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2006. – 83 с.
5. Резолюция III Всероссийского съезда «Школьное математическое образование» [Электронный ресурс]. – Якутск : Управление образования ОА г. Якутска, 2016. – Режим доступа: URL: http: //www.yaguo.ru /files /rezolyuciya_3_sezda_matematikov.pdf, свободный. – Загл. с экрана (Дата обращения: 24.02.2016).
6. Тембербекова, А. А., Чугунова, И. В., Байгонакова, Г. А. Методика обучения математике [Текст] : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / А. А. Тембербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. – Горно-Алтайск : РИО ГАГУ, 2013. – 365 с.
7. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. Том 1 [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – 440 с.
8. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике [Текст] : учеб. пособие / Л. М. Фридман. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 248 с.

9. Шабанова, М. В., Ястребов, А. В., Безумова, О. Л., Котова, С. Н. Экспериментальная математика как содержательно-методическая линия школьного курса математики [Текст] / М. В. Шабанова, А. В. Ястребов, О. Л. Безумова, С. Н. Котова // Труды международной научной конференции 28 сентября – 2 октября 2015, Армения, Горис, Москва, РУДН. Том 1: «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство». – Ер.: Астхик Гратун Ереван, 2015. – С. 395–399.

10. Шабанова, М. В., Овчинникова, Р. П., Ястребов, А. В. и др. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение [Текст] : коллективная монография. – М. : Издательский дом Академии Естествознания, 2016. – 300 с. doi: 10.17513/np.141.

Bibliograficheskij spisok

1. Bogun, V. V., Ostashkov, V. N., Smirnov, E. I. Nagljadnoe modelirovanie v obuchenii matematike: teorija i praktika [Tekst] : uchebnoe posobie / V. V. Bogun, V. N. Ostashkov, E. I. Smirnov ; pod red. E. I. Smirnova. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2010. – 498 s.

2. Dorofeev, G. V., Sharygin, I. F., Suvorova, S. V. i dr. Matematika. 5 klass [Tekst] : ucheb. dlja obshheobrazovat. uchrezhdenij / G. V. Dorofeev, I. F. Sharygin, S. B. Suvorova i dr. – 12-e izd. – M. : Prosveshhenie, 2011. – 300 s.

3. Dorofeev, G. V., Sharygin, I. F., Suvorova, S. V. i dr. Matematika. 6 klass [Tekst] : ucheb. dlja obshheobrazovat. uchrezhdenij / G. V. Dorofeev, I. F. Sharygin, S. B. Suvorova i dr. – 11-e izd. – M. : Prosveshhenie, 2010. – 303 s.

4. Epifanova, N. M., Sharova, O. P. Metodika obuchenija algebre osnovnoj shkoly (materialy k lekcionnym zanjatijam) [Tekst] : uchebno-metodicheskoe posobie. – Jaroslavl' : Izd-vo JaGPU, 2006. – 83 s.

5. Rezoljucija III Vserossijskogo s#ezda «Shkol'noe matematicheskoe obrazovanie» [Jelektronnyj resurs]. – Jakutsk : Upravlenie obrazovanija OA g. Jakutska, 2016. – Rezhim dostupa: URL: http: //www.yaguo.ru /files /rezolyuciya_3_sezda_matematikov.pdf, svobodnyj. – Zagl. s jekrana (Data obrashhenija: 24.02.2016).

6. Temberbekova, A. A., Chugunova, I. V., Bajgonakova, G. A. Metodika obuchenija matematike [Tekst] : ucheb. posobie dlja stud. vyssh. ucheb. zavedenij. – Gorno-Altajsk : RIO GAGU, 2013. – 365 s.

7. Fihtengol'c, G. M. Osnovy matematicheskogo analiza. Tom 1 [Tekst]. – M. : Nauka, 1968. – 440 s.

8. Fridman, L. M. Teoreticheskie osnovy metodiki obuchenija matematike [Tekst] : ucheb. posobie. – M. : Editorial URSS, 2005. – 248 s.

9. Shabanova, M. V., Jastrebov, A. V., Bezumova, O. L., Kotova, S. N. Jeksperimental'naja matematika kak soderzhatel'nometodicheskaja linija shkol'nogo kursa matematiki [Tekst] // Trudy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii 28 sentjabrja – 2 oktjabrja 2015, Armenija, Goris, Moskva, RUDN. Tom 1: «Obrazovanie, nauka i jekonomika v vuzah i shkolah. Integracija v mezhdunarodnoe obrazovatel'noe prostranstvo». – Er.: Asthik Gratun Erevan, 2015. – S. 395–399.

10. Shabanova, M. V., Ovchinnikova, R. P., Jastrebov, A. V. i dr. Jeksperimental'naja matematika v shkole. Issledovatel'skoe obuchenie : kollektivnaja monografija. – M. : Izdatel'skij dom Akademii Estestvoznanija, 2016. – 300 s. doi: 10.17513/np.141.