*Д.И.Артамкин*

# КОМПОНЕНТЫ СХЕМЫ МОДУЛЕЙ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА ДВА НА ТРЕХМЕРНОЙ КВАДРИКЕ

## Введение

В статье изучается схема модулей $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ Гизекера–Маруямы полустабильных пучков без кручения ранга 2 на квадрике $Q\subset\mathbf{P}^4$ с классами Черна $c_1$=0, $c_2$=2, $c_3$=0 [1,2].

Введем несколько обозначений, которыми будем пользоваться ниже.

- $\mathrm{M}:=\mathrm{M}_Q(2;0,2)$ –- многообразие модулей стабильных векторных расслоений $E$ на $Q$, с rk$E$=2 и классами Черна $c_1(E)$=0 и $c_2(E)$=2.
- Через $\overline{\mathrm{M}}=\overline{\mathrm{M}_Q(2;0,2)}^G$ обозначим замыкание многообразия модулей расслоений $\mathrm{M}_Q(2;0,2)$ в схеме $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$.
- Пусть $x\in V$ произвольная точка некоторого векторного пространства $V$ над полем $\mathbf{k}$. Обозначим $<x>$ подпространство $\mathbf{k}x\in P(V)$.

Известно [2], что $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ не пусто и содержит неприводимую компоненту $\overline{\mathrm{M}}$, содержащую в качестве открытого плотного подмножества многообразие $\mathrm{M}_Q(2;0,2)$ модулей стабильных голоморфных векторных расслоений ранга два на квадрике с нулевым первым классом Черна и минимально возможным, согласно условию Шварценберга [2. С.194], вторым классом Черна, равным 2.

В статье доказывается, что $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ содержит также еще по крайней мере две неприводимые 13-мерные компоненты, пересекающие компоненту $\overline{\mathrm{M}}$ по компонентам границы $\partial\overline{\mathrm{M}}:=\overline{\mathrm{M}}\setminus\mathrm{M}$.

Основной результат, дающий описание этих двух компонент, заключается в следующих теоремах:

**Теорема 1.** *В* $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ *существует неприводимая компонента* $\overline{\mathrm{M}}_0$, *которая есть замыкание неприводимого многообразия* $\mathrm{M}_0$, $\dim\mathrm{M}_0=13$. *Все точки* $\mathrm{M}_0$ *– стабильные пучки,* $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ *неособо вдоль* $\mathrm{M}_0$, *и* $\mathrm{M}_0$ *пересекает* $\overline{\mathrm{M}}$ *по неприводимому* 8-*мерному многообразию, лежащему в* $\overline{\mathrm{M}}$, *точное описание которого дается формулой* (1.13).

**Теорема 2.** *В* $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ *существует неприводимая компонента* $\overline{\mathrm{M}}_1$, *которая есть замыкание неприводимого многообразия* $\mathrm{M}_1$, $\dim\mathrm{M}_1=13$. $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ *неособо вдоль* $\mathrm{M}_1$, *и* $\mathrm{M}_1$ *пересекает* $\overline{\mathrm{M}}$ *по неприводимому* 8-*мерному многообразию, лежащему в* $\overline{\mathrm{M}}$.

Статья состоит из двух параграфов, первый из которых посвящен доказательству Теоремы 1, а второй – Теоремы 2.

## 1. Компонента $\mathrm{M}_0$

Рассмотрим общую точку $[\mathrm{E}]\in\mathrm{M}$, Оттавиани и Шурек в [2] показали, что нулями общего сечения $s\in H^0(\mathrm{E}(1))$ является объединение двух непересекающихся коник. Обратно, если мы имеем пару непересекающихся коник $C_1\amalg C_2$ на $Q$, то конструкция Серра нам дает расслоение E на $Q$.

$$\xi: 0\to O_Q(-1)\to \mathrm{E}\to I_{C_1\amalg C_2,Q}(1)\to 0. \tag{1.1}$$

Тогда $\xi\in\mathrm{Ext}^1(I_{C_1\amalg C_2,Q}(1),O_Q(-1))$, но

$$\mathrm{Ext}^1(I_{C_1\amalg C_2,Q}(1),O_Q(-1))=H^0(Ext^1(I_{C_1\amalg C_2,Q}(1),O_Q(-1)))=$$

$$= H^0(Ext^2(O_{C_1 \amalg C_2, Q}(1), O_Q(-1))) = H^0(O_{C_1} \oplus O_{C_2}) \qquad ((1.2)$$

и при этом отождествлении компоненты $\xi_i \in H^0(O_{C_i})$, $i$=1,2 элемента $\xi$, будучи образующими в $H^0(O_{C_i})$, обеспечивают локальную свободу пучка E.

Введем несколько дополнительных обозначений:

- $H_{2,2}$ – объединение всех неприводимых компонент схемы $\mathrm{Hilb}^{4n+2}(Q)$, содержащих несвязное объединение $C_1 \amalg C_2$ двух различных непересекающихся коник в качестве общей точки.
- $\Sigma = \{(C, \langle s \rangle) | C \in H_{2,2},\ s \in H^0(Ext^1(I_{C,Q}(1), O_Q(-1)))$ – сечение без нулей$\}$.
- $H^*_{2,2} = \{C \in H_{2,2} |\ C = C_1 \amalg C_2,\ C_1, C_2$ – гладкие коники, $C_1 \cap C_2 = \varnothing\}$.
- $\Sigma^* = \{(C, \langle s \rangle) \in \Sigma | C \in H^*_{2,2}\}$.

**Лемма 1.** *$H^*_{2,2}$ неприводимо.*

**Доказательство.** Действительно, ввиду неособости $Q$ любая коника $C$ на квадрике $Q$ высекается из нее единственной плоскостью $\mathbf{P}^2 = Span(C)$ в $\mathbf{P}^4$, а значит, получаем биекцию

$sec$: $H^*_{2,2} \to Sym^2 G(2,4) \setminus Y$: $C_1 \amalg C_2 \mapsto (Span(C_1), Span(C_2))$, где $Y = \{(\mathbf{P}_a^2, \mathbf{P}_b^2) \in Sym^2 G(2,4) | \mathbf{P}_a^2 \cap \mathbf{P}_b^2 \cap Q \neq \varnothing\}$. Учитывая неособость $Sym^2 G(2,4)$ и то, что $Y$ является собственным замкнутым подмножеством, получаем неприводимость $H^*_{2,2}$.ث

Рассмотрим кривую $B$ в $\Sigma$ такую, что $B = B^* \cup \{b_0\}$, где $b_0 = (C_0, \langle s_0 \rangle)$, а $B^* = B \cap \Sigma^*$, причем:

a) $C_0 = C_1 \,\tilde{\cup}\, C_2$ – схема, определяемая нерасщепляющейся точной тройкой

$$0 \to \mathbf{k}_{x_0} \to O_{C_1 \tilde{\cup} C_2} \to O_{C_1 \cup C_2} \to 0, \qquad (1.3)$$

где $x_0 = C_1 \cap C_2$ – точка трансверсального пересечения $C_1$ и $C_2$, где $C_1$ и $C_2$ – гладкие коники.

b) $s_0 \in Ext^1(I_{C_0}(1), O_Q(-1))$.

Итак, мы имеем отображение $S$:$B^* \to$M, задаваемое конструкцией Серра.

**Предложение 1.2.** *Конструкция Серра* (1.1) *определяет отображение* $S: B \to \overline{\mathrm{M}}^G$ *такое, что*

1) $S(b_0)$=[E$_0$], *где* [E$_0$]$\in \partial \overline{\mathrm{M}} := \overline{\mathrm{M}} \setminus \mathrm{M}$,

2) E$_0$ *стабилен по Гизекеру*,

3) *Пусть* $\tilde{E}_0 = \mathrm{E}_0^{\vee\vee}$ *и* $can$:E$_0 \to \tilde{E}_0$ – *каноническое отображение пучка* E$_0$ *в свой дважды двойственный пучок* $\tilde{E}_0$, *тогда* coker $can = \mathbf{k}_{x_0}$, $\tilde{E}_0$ – *рефлексивен*, $c_3(\tilde{E}_0)$=2 *и имеет место коммутативная диаграмма*:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & O_Q(-1) \arrow[d, equal] & \mathrm{E}_0 \arrow[r] \arrow[d, "can"'] & I_{\widetilde{C_1\cup C_2},Q}(1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & O_Q(-1) & \tilde{E}_0 \arrow[r] \arrow[d] & I_{C_1\cup C_2,Q}(1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathbf{k}_{x_0} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbf{k}_{x_0} \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad (1.4)
$$

**Доказательство.** Докажем сначала утверждение 3). Из (1.3) имеем: $0 \to I_{C_0,Q} \xrightarrow{i} I_{C_1\cup C_2,Q}(1) \xrightarrow{e} \mathbf{k}_{x_0} \to 0$. Применяя к этой точной последовательности функтор $\mathrm{Hom}(\cdot, O_Q(-1))$, получим следующую точную последовательность:

$$
\begin{aligned}
\ldots \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{k}_{x_0}, O_Q(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(I_{C_1\cup C_2,Q}, O_Q(-1)) \xrightarrow{i_*} \\
\xrightarrow{i_*} \mathrm{Ext}^1(I_{C_0,Q}, O_Q(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_{x_0}, O_Q(-1)) \to \ldots
\end{aligned}
\qquad (1.5)
$$

По двойственности Серра $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{k}_{x_0}, O_Q(-1)) = \mathrm{Ext}^2(O_Q(-1), \mathbf{k}_{x_0}(-3))^\vee$, но, в свою очередь, $\mathrm{Ext}^2(O_Q(-1), \mathbf{k}_{x_0}(-3)) = \mathrm{Ext}^2(O_Q, \mathbf{k}_{x_0}(-2)) = H^2(\mathbf{k}_{x_0}(-2)) = H^2(\mathbf{k}_{x_0}) = 0$. Аналогично $\mathrm{Ext}^2(\mathbf{k}_{x_0}, O_Q(-1)) = H^1(\mathbf{k}_{x_0})^\vee = 0$, поэтому отображение $i_*$ в (1.5) является изоморфизмом. Следовательно, для любого элемента $\xi \in \mathrm{Ext}^1(I_{C_0,Q}(1), O_Q(-1))$ найдется такой элемент $\xi_0 \in \mathrm{Ext}^1(I_{C_1\cup C_2,Q}(1), O_Q(-1))$ такой, что $\xi = i_*\xi_0$. Последнее означает, что расширение, определяемое элементом $\xi$:

$$0 \to O_Q(-1) \to \mathrm{E}_0 \to I_{C_0,Q}(1) \to 0, \qquad (1.6)$$

получается из расширения

$$0 \to O_Q(-1) \to \tilde{E}_0 \xrightarrow{v} I_{C_1\cup C_2,Q}(1) \to 0, \qquad (1.7)$$

определяемого элементом $\xi_0$, при помощи так называемой операции “push out”, то есть из двух точных троек $0 \to I_{C_0,Q}(1) \xrightarrow{i} I_{C_1\cup C_2,Q}(1) \xrightarrow{e} \mathbf{k}_{x_0} \to 0$ и (1.7) получается коммутативная диаграмма:

0 0

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & O_Q(-1) & \to & \mathrm{E}_0 & \longrightarrow & I_{C_0,Q}(1) & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & O_Q(-1) & \to & \tilde{E}_0 & \xrightarrow{\ v\ } & I_{C_1\cup C_2,Q}(1) & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow e\circ v & & \downarrow e & & \\
 & & & & \mathbf{k}_{x_0} & = & \mathbf{k}_{x_0} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

что доказывает утверждение 3).

Для доказательства утверждения 2) нам достаточно показать, что пучок $E$ стабилен. Предположим противное, рассмотрим подпучок $L$ ранга 1 пучка Е, тогда пучок $L^{\vee\vee}$ является, очевидно, подпучком пучка $\mathrm{E}^{\vee\vee}=\tilde{E}$, а так как $L^{\vee\vee}$ – рефлексивный пучок ранга 1, то $L^{\vee\vee}=O_Q(n)$. Тогда если $\tilde{E}$ не является стабильным, то $n\geq 0$. Получаем две точных тройки: $0\to O_Q(-1)\to\tilde{E}\to I_{C_1\cup C_2,Q}(1)\to 0$ и $0\to O_Q(n)\xrightarrow{\ i\ }\tilde{E}\to\operatorname{coker} i\to 0$, домножив которые на $O_Q(-n)$, получаем противоречие: у пучков $O_Q(-n-1)$ и $I_{C_1\cup C_2,Q}(1-n)$ $n\geq 0$ нет сечений (наличие сечений у $I_{C_1\cup C_2,Q}(1)$ равносильно принадлежности обеих коник одному $\mathbf{P}^3$), а у $\tilde{E}(-n)$ – есть. Таким образом $\tilde{E}$, а, значит, и Е стабильны. Утверждение 2) доказано.

Утверждение 1) теперь очевидно.∎

Пусть теперь

- $S_{2,2}=\{C\in H_{2,2}|C=C_1\tilde{\cup}C_2$ – схема вида (1.3)$\}$.
- $H^{**}_{2,2}=H^{*}_{2,2}\cup S_{2,2}$.
- $\Sigma^{**}=\{(C,<s>)\in\Sigma\,|\,C\in H^{**}_{2,2}\}$.
- $D_{2,2}=S(\Sigma^{**}\backslash\Sigma^{*})$.
- $H_{4,0}$ – объединение всех неприводимых компонент схемы $\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$, содержащих гладкую нормквартику ${}^0C^4$ в качестве общей точки.
- $S_{4,0}=\{C\in H_{4,0}|C=C_1\cup C_2,\ C_1\cap C_2=\{pt\}\}$.

**Замечание 1.2.1.** $\dim D_{2,2}=8$, *то есть* $D_{2,2}$ *– неприводимая компонента в* $\partial\overline{\mathrm{M}}$.

**Лемма 1.3.** $S_{4,0}$ *неприводимо*.

**Доказательство.** Каждой гладкой конике $C$ на $Q$ соответствует единственная плоскость $\mathbf{P}^2=\mathrm{Span}(C)$, причем $C=\mathrm{Span}(C)\cap Q$. Таким образом, получаем инъективный морфизм $\psi$: $S_{4,0}\to Sym^2G(2,4)$:$C=C_1\cup C_2\mapsto(\mathrm{Span}(C_1),\mathrm{Span}(C_2))$. Очевидно что если $C=C_1\cup C_2\in S_{4,0}$, то $\mathrm{Span}(C_1)\cap\mathrm{Span}(C_2)\cap Q=\{pt\}$.

Рассмотрим

$$\Psi:=\psi(S_{4,0})=\{(\mathbf{P}_a^2,\mathbf{P}_b^2)\in Sym^2G(2,4)|\mathbf{P}_a^2\cap\mathbf{P}_b^2\cap Q=\{pt\}. \qquad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что $\Psi$ – неприводимо, откуда следует неприводимость $S_{4,0}$.∎

**Лемма 1.4.** 1) *Схема* $\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$ *неприводима, и* $\dim\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q=12$.

2) *Схема* $\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$ *неособа в точках* $S_{4,0}$, *и общая кривая из* $S_{4,0}$ *деформируется в гладкую кривую* ${}^0C^4$.

**Доказательство.** Рассмотрим график инциденции $\Gamma=\{(Q,{}^0C^4)|\,{}^0C^4\subset Q\}$. Имеем проекции $p_1:\Gamma\to O_{\mathbf{P}^4}(2)$ со слоем $\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$ и $p_2$:$\Gamma\to\mathrm{Hilb}^{4n+1}\mathbf{P}^4$ со слоем $|I_{{}^0C^4,Q}(2)|$. Из неприводимости $|O_{\mathbf{P}^4}(2)|\cong\mathbf{P}^{14}$, $H^0_{4,0}(\mathbf{P}^4)$:=$\{C\in\mathrm{Hilb}^{4n+1}\mathbf{P}^4|C$ – гладкая нормквартика$\}$ $\cong$

$\mathrm{PGL}(\mathbf{P}^4)/\mathrm{PGL}(\mathbf{P}^1)$ и $|I_{{}^0C^4,Q}(2)|$ следует неприводимость $\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$. Отсюда же, очевидно, следует $\dim \mathrm{Hilb}^{4n+1}Q = \dim H^0_{4,0}(\mathbf{P}^4) + h^0(I_{{}^0C^4,Q}(2)) - h^0(O_{\mathbf{P}^4}(2))$ =21+5–14=12. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства утверждения 2) покажем, что $h^0(N_{C/Q})$=12, а $h^1(N_{C/Q})$=0.

Действительно, рассмотрим отображение $N_{C_1/Q} \to N_{C_1\cup C_2/Q}|_{C_1}$, коядром которого, очевидно, будет $\mathbf{k}_x$, где $x$ – точка пересечения $C_1$ и $C_2$ [6]. С другой стороны,

$$N_{C_1/Q} \cong O_{C_1}(1) \oplus O_{C_2}(1) \cong O_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus O_{\mathbf{P}^1}(2), \tag{1.9}$$

откуда получаем точную тройку:

$$0 \to O_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus O_{\mathbf{P}^1}(2) \to N_{C_1\cup C_2/Q}|_{C_1} \to \mathbf{k}_x \to 0.$$

Следовательно,

$$N_{C_1\cup C_2/Q}|_{C_1} \cong O_{\mathbf{P}^1}(2) \oplus O_{\mathbf{P}^1}(3). \tag{1.10}$$

Рассмотрим три точные тройки:

$$\begin{gathered} 0 \to N' \to N_{C_1\cup C_2/Q} \to N_{C_1\cup C_2/Q}|_{C_1} \to 0, \\ 0 \to N_{C_1/Q} \to N_{C_1\cup C_2/Q}|_{C_1} \to \mathbf{k}_x \to 0, \\ 0 \to N' \to N_{C_2/Q} \to \mathbf{k}_x \to 0. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Подставляя в них (1.9) и (1.10), получим:

$$0 \to O_{C_2}(2pts) \oplus O_{C_2}(pt) \to N_{C_1\cup C_2/Q} \to O_{C_1}(2pts) \oplus O_{C_1}(3pts) \to 0. \tag{1.12}$$

Нетрудно видеть, что $h^0(O_{C_2}(2pts) \oplus O_{C_2}(pt)) = 5$, $h^0(O_{C_1}(2pts) \oplus O_{C_1}(3pts)) = 7$ и $h^1(O_{C_2}(2pts) \oplus O_{C_2}(pt)) = h^1(O_{C_1}(2pts) \oplus O_{C_1}(3pts)) = 0$. Следовательно, $h^0(N_{C/Q})$=12 и $h^1(N_{C/Q})$=0.

Тогда, согласно теории деформаций (см., например, [6]), схема $\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$ неособа в точке $C$. При этом общая кривая из $S_{4,0}$ деформируется в гладкую кривую ${}^0C^4$.ڤ

**Следствие.** *Все* $S_{4,0}$ *содержатся в замыкании некоторой неприводимой компоненты* $H^{\circ}_{4,0}$ схемы Гильберта $\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$.

Пусть также

- $H^*_{4,0} = \{C \in H^{\circ}_{4,0} | C -$ нормквартика $\}$.
- $H^{**}_{4,0} = H^*_{4,0} \cup S_{4,0}$.
- $\Sigma^{**}_{4,0} = \{(C, \langle s\rangle) \mid C \in H^{**}_{4,0},\ s \in H^0(Ext^1(I_{C,Q}(1), O_Q(-1)))\}$.

**Лемма 1.5.** $\Sigma^{**}_{4,0}$ *неприводимо.*

**Доказательство.** $H^*_{4,0}$ неприводимо, так как $H^*_{4,0}$ – общие точки неприводимой компоненты $H^{\circ}_{4,0}$. Следовательно, $H^{**}_{4,0}$ неприводимо.

Имеется проекция $p_{4,0} : \Sigma^{**}_{4,0} \to H^{**}_{4,0} : (C, \langle s\rangle) \mapsto C$. Нетрудно видеть, что $p_{4,0}$ – проекция со слоем $P(H^0(Ext^1(I_{C,Q}(1), O_Q(-1))))=\mathbf{P}^2$. Отсюда получаем, что $\Sigma^{**}_{4,0}$ неприводима.ڤ

Введем дополнительные обозначения:

- $\mathrm{N}_{4,0}=S(\Sigma^{**}_{4,0}) \subset \mathrm{M}_Q(2;0,2,2)$, где $S: \Sigma^{**}_{4,0} \to \mathrm{N}_{4,0}(C, \langle s\rangle) \mapsto [\tilde{E}_0]$, расслоенное над своим образом пространство со слоем $P(H^0(E_0(1)))$.
- $\mathrm{M}_{4,0}=\{([\tilde{E}_0], \langle \varepsilon_0\rangle) | \tilde{E}_0 \in \mathrm{N}_{4,0},\ \tilde{E}_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbf{k}_{x_0}$ – эпиморфизм, $x_0 \in Q\}$.

**Замечание 1.5.1.** *Очевидно из леммы* 1.5 *следует также и неприводимость* $N_{4,0}$.

**Замечание 1.5.2.** $M_{4,0}\to N_{4,0}$:$([\tilde{E}_0],\langle\varepsilon_0\rangle)\mapsto[\tilde{E}_0]$ – *проекция с неприводимым слоем* $\mathbf{P}(\tilde{E}_0)$.

Неприводимость $\mathbf{P}(\tilde{E}_0)$ следует из следующей леммы.

**Лемма 1.6** (см. [4. Лемма 4.5]).*Пусть* $F$ *– рефлексивный пучок ранга два на неособом многообразии, и* hd$F\leq1$. Тогда $\mathbf{P}(F)$ *неприводим.*

Так как $\tilde{E}_0$ – стабильный рефлексивный пучок, то (см. [3. Гл.II, §1]) коразмерность множества его особенностей не меньше трех, то есть hd$\tilde{E}_0\leq4–3=1$.

**Лемма 1.7.** $N_{4,0}$ *– гладкое многообразие, и* dim $N_{4,0}$=9, *при этом* $N_{4,0}$ *– открытое подмножество неприводимой компоненты схемы* $M_Q(2;0,2,2)$.

**Доказательство.** Рассмотрим график инциденции: $\Gamma=\{(\tilde{E},{}^0C^4)|\,\tilde{E}=S(({}^0C^4,\langle s\rangle))\}$, как и в доказательстве леммы 1.4, имеем две проекции: $p_1:\Gamma\to N_{4,0}$ со слоем $P(H^0(\tilde{E}_0(1)))$ и $p_2:\Gamma\to\mathrm{Hilb}^{4n+1}Q$ со слоем $P(\mathrm{Ext}^1(I_{{}^0C^4,Q}(2),O_Q))$. Отсюда получаем

$$\dim N_{4,0}=\dim \mathrm{Hilb}^{4n+1}Q+\dim P(\mathrm{Ext}^1(I_{{}^0C^4,Q}(2),O_Q))-\dim P(H^0(\tilde{E}_0(1))).$$

Для вычисления $h^0(E(1))$ рассмотрим точные тройки

$$0\to O_Q\to\tilde{E}(1)\to I_{{}^0C^4,Q}(2)\to 0,$$
$$0\to I_{{}^0C^4,Q}(2)\to O_Q(2)\to O_{{}^0C^4}(2)\to 0.$$

$h^0(O_{{}^0C^4}(2))=9$, $h^0(\tilde{E}_Q(2))$=14, следовательно, $h^0(\tilde{E}(1))$=6. Итак, получаем: dim $N_{4,0}$=12+2–5=9.

Для доказательства неособости многообразия $N_{4,0}$ применим функтор $\mathrm{Hom}(\cdot,\tilde{E})$ к (1.6):

$$\ldots\to\mathrm{Ext}^2(I_{C_1\cup C_2,Q}(1),\tilde{E})\to\mathrm{Ext}^2(\tilde{E},\tilde{E})\to\mathrm{Ext}^2(O_Q(-1),\tilde{E})\to\ldots$$

Из точной последовательности $0\to I_{C_1\cup C_2,Q}(1)\to O_Q(1)\to O_{C_1\cup C_2}(1)\to 0,$ применяя функтор $\mathrm{Hom}(\cdot,\tilde{E})$, получаем

$\ldots\to\mathrm{Ext}^2(O_Q(1),\tilde{E})\to\mathrm{Ext}^2(I_{C_1\cup C_2,Q}(1),\tilde{E})\to\mathrm{Ext}^3(O_{C_1\cup C_2}(1),\tilde{E})\to\ldots$ Заметив, что $\mathrm{Ext}^2(O_Q(1),\tilde{E})=H^2(\tilde{E}(-1))$, из точной последовательности (1.6), домноженной на $O_Q(1)$, получаем $\mathrm{Ext}^2(O_Q(1),\tilde{E})=0$.

По двойственности Серра имеем $\mathrm{Ext}^3(O_{C_1\cup C_2}(1),\tilde{E})=\mathrm{Hom}(\tilde{E},O_{C_1\cup C_2}(-2))$. Применяя функтор $\mathrm{Hom}(\cdot,O_{C_1\cup C_2}(-2))$ к (1.6), получим

$$\ldots\to\mathrm{Hom}(I_{C_1\cup C_2,Q}(1),O_{C_1\cup C_2}(-2))\to\mathrm{Hom}(\tilde{E},O_{C_1\cup C_2}(-2))\to\mathrm{Hom}(O_Q(-1),O_{C_1\cup C_2}(-2))\to.$$

Но $\mathrm{Hom}(O_Q(-1),O_{C_1\cup C_2}(-2))=H^0(O_{C_1\cup C_2}(-1))=0.$ Заметим также, что

$\mathrm{Hom}(I_{C_1\cup C_2,Q}(1),O_{C_1\cup C_2}(-2))=H^0((I_{C_1\cup C_2,Q}(1)|_{C_1\cup C_2})^\vee(-2))=H^0(N^\vee_{C_1\cup C_2/Q}(-3)),$

так как $I_{C_1\cup C_2,Q}(2)|_{C_1\cup C_2}=N_{C_1\cup C_2/Q}$.

Но из точной последовательности (1.12) $h^0(N^{\vee}_{C_1\cup C_2/Q}(-3))=0,$ откуда получаем что

$\mathrm{Ext}^2(I_{C_1\cup C_2,Q}(1),\tilde{E})=0,$ а значит и $\mathrm{Ext}^2(\tilde{E},\tilde{E})=0$. Вспоминая, что $\tilde{E}$ – стабильный пучок, получаем гладкость $\mathrm{M}_Q(2;0,2,2)$ в точке $[\tilde{E}]\in \mathrm{N}_{4,0}$, $\dim \mathrm{M}_Q(2;0,2,2)=\dim \mathrm{Ext}^1(\tilde{E},\tilde{E})$, по теореме Римана–Роха $\dim \mathrm{Ext}^1(\tilde{E},\tilde{E})=6c_2-3=9$, то есть размерность $\mathrm{N}_{4,0}$ совпадает с размерностью $\mathrm{M}_Q(2;0,2,2)$, откуда следует гладкость $\mathrm{N}_{4,0}$.ڨ

**Следствие.** $\mathrm{M}_{4,0}$ *неприводимо размерности* 13.

Действительно, $\dim \mathrm{M}_{4,0}=\dim \mathrm{N}_{4,0}+\dim\mathbf{P}(\tilde{E})=9+4=13$.

Рассмотрим отображение $\varphi:\mathrm{M}_{4,0}\to \mathrm{M}_Q(2;0,2,0):([\tilde{E}_0],\langle\varepsilon_0\rangle)\mapsto \mathrm{E}=\ker\varepsilon_0$, корректно определенное в силу предложения 1.2.

**Предложение 1.8.** *$\varphi$ – инъективный морфизм.*

Положив $\mathrm{M}_0=\varphi(\mathrm{M}_{4,0})$, имеем $\overline{\mathrm{M}}_0$ – гладкая неприводимая 13–мерная (из леммы 1.7) компонента схемы $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ (предложение 1.8). Неособость схемы $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ вдоль $\overline{\mathrm{M}}_0$ мы получаем, дословно повторяя доказательство неособости $\mathrm{M}_Q(2;0,2,2)$ вдоль $\mathrm{N}_{4,0}$. Из определения $D$, предложения 1.2 и построения $\overline{\mathrm{M}}_0$ непосредственно следует $D\subset \mathrm{M}_0$, откуда очевидно следует

$$\mathrm{M}_0\cap\overline{\mathrm{M}}=D. \tag{1.13}$$

Из предложения 1.2 следует также стабильность пучков из $\mathrm{M}_0$. Этим мы заканчиваем доказательство теоремы 1.

## 2. Компонента $\mathrm{M}_1$

Пусть $H_{2,2}$, $\Sigma$, $H^*_{2,2}$, $\Sigma^*$ те же, что и в предыдущем параграфе.

Рассмотрим теперь кривую $B$ в $\Sigma$ такую, что $B=B^*\cup\{b_0\}$, где $b_0=(C_0,\langle s_0\rangle)$, а $B^*=B\cap\Sigma^*$, причем:

a) $C_0=C_1\hat{\cup} C_2$ – схема, определяемая нерасщепляющейся точной тройкой

$$0\to \mathbf{k}_{x_0}\oplus\mathbf{k}_{y_0}\to O_{C_1\hat{\cup}C_2}\to O_{C_1\cup C_2}\to 0, \tag{2.1}$$

где $\{x_0;y_0\}=C_1\cap C_2$ – две точки пересечения гладких коник $C_1$ и $C_2$, на $Q$.

b) $s_0\in Ext^1(I_{C_0}(1),O_Q(-1))$.

Как и в предыдущем параграфе, имеем отображение $S:B^*\to \mathrm{M}$, задаваемое конструкцией Серра.

**Предложение 2.1.** *Конструкция Серра* (1.1) *определяет отображение* $S:B\to\overline{\mathrm{M}}^G$ *такое, что*

1) $S(b_0)=[\mathrm{E}_0]$, *где* $[\mathrm{E}_0]\in\partial\overline{\mathrm{M}}:=\overline{\mathrm{M}}\setminus\mathrm{M}$,

2) $\mathrm{E}_0$ *стабилен по Гизекеру,*

3) *пусть* $\tilde{E}_0=\mathrm{E}_0^{\vee\vee}$ *и* $can:\mathrm{E}_0\to\tilde{E}_0$ *– каноническое отображение пучка* $\mathrm{E}_0$ *в свой дважды двойственный пучок* $\tilde{E}_0$, *тогда* $\operatorname{coker} can=\mathbf{k}_{x_0}\oplus\mathbf{k}_{y_0}$, $\tilde{E}_0$ *– рефлексивен,* $c_3(\tilde{E}_0)=2$ *и имеется коммутативная диаграмма*:

0 0

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & O_Q(-1) & \to & \mathrm{E}_0 & \to & I_{C_1 \hat{\cup} C_2, Q}(1) & \to & 0 \\
 & & \| & & can\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & O_Q(-1) & \to & \tilde{E}_0 & \to & I_{C_1 \cup C_2, Q}(1) & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathbf{k}_{x_0} \oplus \mathbf{k}_{y_0} & = & \mathbf{k}_{x_0} \oplus \mathbf{k}_{y_0} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\qquad (2.2)
$$

**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству предложения 1.2.ڤ
Пусть теперь

- $S^*_{2,2}=\{C\in H_{2,2}|C=C_1 \hat{\cup} C_2$ – схема вида (2.1)$\}$.
- $H^{***}_{2,2}=H^*_{2,2}\cup S^*_{2,2}$.
- $\Sigma^{***}=\{(C,\langle s\rangle)\in\Sigma|C\in H^{***}_{2,2}\}$.
- $D^*=S(\Sigma^{***}\backslash\Sigma^*)$.
- $H_{4,1}$ – объединение всех неприводимых компонент схемы $\mathrm{Hilb}^{4n}Q$, содержащих гладкую эллиптическую квартику ${}^1C^4$ в качестве общей точки.
- $S_{4,1}=\{C\in H_{4,1}|C=C_1\cup C_2$, $C_1$, $C_2$ –гладкие коники, $C_1\cap C_2=\{2pts\}\}$.

**Замечание 2.1.1.** $\dim D^*=8$, *то есть* $D^*$ *– неприводимая компонента в* $\partial\overline{\mathrm{M}}$.
**Лемма 2.2.** $S_{4,1}$ *неприводимо.*
**Доказательство.** Неприводимость $S_{4,1}$ получаем так же, как и неприводимость $S_{4,0}$.ڤ
**Лемма 2.3.** 1) $\dim \mathrm{Hilb}^{4n}Q=12$.
2) схема $\mathrm{Hilb}^{4n}Q$ неособа в точках $S_{4,1}$.
**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству леммы 1.4.ڤ
**Следствие.** *Все* $S_{4,1}$ *содержатся в замыкании некоторой неприводимой компоненты* $H^o_{4,1}$.
Пусть также

- $H^*_{4,1}=\{{}^1C^4\in H^o_{4,1}|{}^1C^4$ – гладкая эллиптическая квартика$\}$.
- $H^{**}_{4,1}=H^*_{4,1}\cup S_{4,1}$.
- $\Sigma^{**}_{4,1}=\{(C,\langle s\rangle)|C\in H^{**}_{4,1}, s\in H^0(Ext^1(I_{C,Q}(1),O_Q(-1)))\}$.

**Лемма 2.4.** $\Sigma^{**}_{4,1}$ *неприводимо.*
**Доказательство.** Доказательство аналогично доказательству леммы 1.5.ڤ
Введем дополнительные обозначения:

- $\mathrm{N}_{4,1}=S(\Sigma^{**}_{4,1})\subset \mathrm{M}_Q(2;0,2,2)$, где $S:(C,\langle s\rangle)\mapsto[\tilde{E}_0]$, расслоение со слоем $P(H^0(\tilde{E}_0(1)))$.
- $\mathrm{M}_{4,1}=\{([\tilde{E}_0],\langle\varepsilon_0\rangle)|\tilde{E}_0\in \mathrm{N}_{4,1}$, $\tilde{E}_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathbf{k}_{x_0}\oplus\mathbf{k}_{y_0}$ – эпиморфизм, $x_0, y_0\in Q\}$.

**Замечание 2.4.1.** $\mathrm{N}_{4,1}$ *неприводимо* (из Леммы 2.4).

**Замечание 2.4.2.** $\mathrm{M}_{4,1}\to \mathrm{N}_{4,1}:([\tilde{E}_0],\langle\varepsilon_0\rangle)\mapsto[\tilde{E}_0]$ *– проекция с неприводимым слоем* $\mathbf{P}(\tilde{E}_0)$.
**Лемма 2.5.** $\mathrm{N}_{4,1}$ *– гладкое многообразие, и* $\dim \mathrm{N}_{4,1}=9$.
**Доказательство.** Аналогично доказательству леммы 1.7 имеем:

$$\dim\mathrm{N}_{4,1}=\dim \mathrm{Hilb}^{4n}Q+\dim P(\mathrm{Ext}^1(I_{{}^1C^4,Q}(2),O_Q))-\dim P(H^0(\tilde{E}(1))).$$

Для вычисления $h^0(\tilde{E}(1))=\dim H^0(\tilde{E}(1))$ рассмотрим две точные тройки:

$$0 \to O_Q \to \tilde{E}(1) \to I_{{}^1C^4,Q}(2) \to 0,$$
$$0 \to I_{{}^1C^4,Q}(2) \to O_Q(2) \to O_{{}^1C^4}(2) \to 0.$$

$h^0(O_{{}^1C^4}(2))$ =8, $h^0(O_Q(2))$=14, следовательно, $h^0(\tilde{E}(1))$=7.

Гладкость $N_{4,1}$ получается аналогично лемме 1.7.ڤ

**Следствие.** $M_{4,1}$ *неприводимо размерности* 13.

**Доказательство.** Действительно dim $M_{4,1}$=dim $N_{4,1}$+dim$\mathbf{P}(\tilde{E})$=9+4=13.ڤ

Рассмотрим отображение

$$\varphi: M_{4,1} \to M_Q(2;0,2,0): ([\tilde{E}_0],\langle\varepsilon_0\rangle) \mapsto E=\ker \varepsilon_0,$$

корректно определенное в силу предложения 2.1.

**Предложение 2.6.** *$\varphi$ – инъективный морфизм.*

Нетрудно видеть, что многообразие $M_1=\varphi(M_{4,1})$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

## Библиографический список


1. *Ein L., Sols I.* Stable vector bundles on quadric hypersurfaces // Nagoya Math. J. 1986.V. 96 P. 11–22.
2. *Ottaviani G., Szurek M.* On Moduli of Stable 2-Bundles with Small Chern Classes on $Q_3$ // Annali di Matematica pura ed applicata 1994. Vol. CLXVII (VI) P. 191–241.
3. *Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир, 1984.
4. *Stromme S.A.* Ample Divisors on Fine Moduli Spaces on the Projective Plane // Mathematishe Zeitschrift 1984. V. 187. P. 405–423.
5. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254, P. 121–176.
6. *Hartshorne R. Hirshovitz A.* Smoothing algebraic space curves. In: Algebraic geometry, Sitges (Barcelona), 1983, Lecture Notes in Math., 1124. Springer, Berlin-New York, 1985. 98–131.
7. *Maruyama M.* Moduli of stable sheaves I, J. Math. Kyoto Univ. 1977. V. 17, P. 91–126.
8. *Maruyama M.* Moduli of stable sheaves II, J. Math. Kyoto Univ. 1978. V. 18, P. 557–614.