Д.И. Артамкин

СВОЙСТВА СТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА ДВА НА ТРЕХМЕРНОЙ КВАДРИКЕ

Введение

Введем несколько обозначений, которыми, для краткости, будем пользоваться ниже.

- Q – гладкая трехмерная квартика в $\mathbf{P}^4$.
- $\mathrm{M}_Q(2;0,2)$ – многообразие модулей стабильных векторных расслоений E на Q, с $\mathrm{rk}E=2$ и классами Черна $c_1(E)=0$ и $c_2(E)=2$.
- $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ – схема модулей Гизекера-Маруямы полустабильных пучков без кручения ранга два на квадрике Q с классами Черна $c_1=0$, $c_2=2$, $c_3=0$.
- Через $\overline{M_Q(2;0,2)}^G$ обозначим замыкание многообразия модулей расслоений $\mathrm{M}_Q(2;0,2)$ в схеме $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$.
- Пусть $x\in V$ произвольная точка некоторого векторного пространства V над полем $\mathbf{k}$. Обозначим $<x>$ подпространство $\mathbf{k}x\in P(V)$.

Известно, что $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ не пусто и содержит неприводимую компоненту $\overline{M_Q(2;0,2)}^G$, содержащую в качестве открытого плотного подмножества многообразие $\mathrm{M}_Q(2;0,2)$ модулей стабильных голоморфных векторных расслоений ранга два на квадрике с нулевым первым классом Черна и минимально возможным, согласно условию Шварценбергера (см. [6. С.194]), вторым классом Черна, равным 2.

Также известно (см. [1]), что $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ содержит еще одну неприводимую 13-мерную компоненту, пересекающую компоненту $\overline{M_Q(2;0,2)}^G$ по замыканию неприводимого восьмимерного многообразия в границе $\overline{\partial M_Q(2;0,2)}^G := \overline{M_Q(2;0,2)}^G \setminus M_Q(2;0,2)^G$.

В работе дается геометрический метод описания компонент схемы $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$. Для этого выясняется, что схема $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ не содержит чисто полустабильных пучков, и любой пучок из $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$, подкрученный на 1, имеет сечения, причем нулями общего сечения является кривая степени 4, возможно, с добавленными точками. В работе рассмотрены все квартики без кратных компонент. Новых компонент схемы $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ не обнаружено.

Основные результаты статьи заключены в следующих теоремах:

Теорема 1. *Пусть* $[\mathrm{E}]\in\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$, *тогда* $h^0(\mathrm{E}(1))>0$, причем нулями $(s)_0$ *общего сечения* $s\in H^0(\mathrm{E}(1))$ *является кривая степени* 4.

Теорема 2. *В* $\mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ *не существует стабильных пучков* E *таких, что нулями сечений пучка* $\mathrm{E}^{\vee\vee}(1)$ *являются следующие кривые:*

1) *гладкая эллиптическая квартика;*
2) *несвязное объединение нормкубики и прямой;*
3) *несвязное объединение коники и двух прямых;*
4) *несвязное объединение четырех прямых.*

Статья состоит из четырех параграфов. Первый параграф посвящен доказательству теоремы 1. Последующие параграфы последовательно доказывают различные пункты теоремы 2.

§1. Наличие сечений у подкрученного пучка

Рассмотрим общую точку [E]$\in$ $M_Q(2;0,2)$. Оттавиани и Шурек в [6] показали, что множеством нулей общего сечения $s\in H^0(E(1))$ является объединение двух гладких непересекающихся коник C_1 и C_2. Обратно, конструкция Серра для двух непересекающихся коник нам дает расслоение E на Q.

$$\xi : 0 \to O_Q(-1) \xrightarrow{s} \mathrm{E} \to I_{C_1 \amalg C_2, Q}(1) \to 0. \tag{1.1}$$

Тогда $\xi \in \mathrm{Ext}^1(I_{C_1 \amalg C_2, Q}(1), O_Q(-1))$. Необходимо также заметить, что $\mathrm{Ext}^1(I_{C_1 \amalg C_2, Q}(1), O_Q(-1)) = H^0(O_{C_1} \oplus O_{C_2})$, и при этом отождествлении компоненты $\xi_i \in H^0(O_{C_i})$ (i=1,2) элемента ξ, будучи образующими в $H^0(O_{C_i})$, обеспечивают локальную свободу пучка E.

Отображение S, сопоставляющее квартике C на квадрике и сечению $\xi \in \mathrm{Ext}^1(I_{C,Q}(1), O_Q(-1))$ пучок из точной тройки $0\to O_Q(-1)\to E\to I_{C,Q}(1)\to 0$, будем называть отображением Серра:

$$S{:}(C,\langle\xi\rangle) \mapsto E. \tag{1.2}$$

Поскольку по конструкции Серра кривые степени 4 на Q возникают как сечения пучка E(1), то естественно поставить вопрос: всякий ли пучок [E]$\in$ $M_Q(2;0,2,0)$ можно получить по кривой C, являющейся нулями сечения E(1), и соответствующему расширению $\xi \in \mathrm{Ext}^1(I_{C,Q}(1), O_Q(-1))$? Ответ на него дает теорема 1, доказательство которой мы разобьем на несколько лемм.

Лемма 1.1. *Пусть E – рефлексивный пучок ранга* 2 *без кручения на квадрике Q, причем E не является стабильным пучком, тогда E является нестабильным пучком (то есть в* $M_Q(2;0,2,0)$ *нет полустабильных, но не стабильных пучков).*

Доказательство. Пусть E не является стабильным пучком, тогда в E существует дестабилизирующий подпучок L такой, что $p_L(m)\geq p_E(m)$.

Заметим сразу, что в силу рефлексивности пучка E пучок $L^{\vee\vee}$ тоже лежит в E:

$$\begin{array}{lccc} L & \to & E & \\ \mathrm{can}\downarrow & & \| & \\ L^{\vee\vee} & \to & E = & E^{\vee\vee} \end{array} \tag{1.3}$$

Очевидно, можно считать, что пучок Q:=E/L не имеет кручения, также можно считать, что rk(L)=1. То есть L – пучок без кручения, причем rk(L)=1, но тогда $L=I_{V,Q}(n)$ и

Q = $I_{W,Q}(-n)$, где V и W – некоторые схемы, причем deg$V$=deg$W$, а $n\geq 0$ вследствие того, что пучок L дестабилизирующий. Тогда имеем $L^{\vee\vee}=O_Q(n)$, итак, из второй строчки диаграммы (1.3) получаем пучок $O_Q(n)$, где $n\geq 0$ лежит в E и, следовательно, пучок E – нестабильный.Î

Следствие 1.1.1. *Нестабильный рефлексивный пучок ранга* 2 *на квадрике Q имеет сечения.*

Лемма 1.2. *Пусть E – рефлексивный пучок ранга* 2 *на квадрике Q с* $c_1(E)=0$*, тогда* $c_2(E)\neq 0$.

Доказательство. Предположим противное. Очевидно, что стабильным такой пучок быть не может. Если пучок E нестабилен, то у него есть сечения, что дает тройку

$0 \to O_Q \to E \to I_{Z_0,Q} \to 0$, где в силу $c_2(E)=0$ $\dim Z_0=0$. Но нетрудно видеть, что эта тройка распадается.∎

Лемма 1.3. *Пусть E – пучок без кручения ранга 2 на квадрике Q с $c_1(E)=0$, $c_2(E)=2$ и $c_3(E)=0$, причем $E=\mathrm{E}^{\vee\vee}$ – нестабильный пучок, тогда пучок E также нестабилен.*

Доказательство. Предположим противное. Так как пучок E нестабилен, то по следствию 1.1.1 у него есть сечения, но тогда нетрудно видеть, что пучок E также имеет сечения.∎

Лемма 1.4. *Пусть* $[\mathrm{E}]\in \mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$, *причем* $E=\mathrm{E}^{\vee\vee}$ *– стабильный пучок, тогда* $h^0(E(1))\geq 3$.

Доказательство. Рассмотрим эйлерову характеристику пучка $E(1)$: очевидно равенство

$$h^0(E(1)) = \chi(E(1)) + h^1(E(1)) - h^2(E(1)) + h^3(E(1)), \qquad (1.4)$$

из которого ввиду неотрицательности $h^i(E(1))$ имеем: $h^0(E(1))\geq\chi(E)-h^2(E(1))$. Так как $E=\mathrm{E}^{\vee\vee}$, то $c_1(E)= c_1(\mathrm{E})=0$, а $c_2 = \begin{cases} 1, & \text{либо} \\ 2 & \end{cases}$.

Разберем отдельно эти два случая (различные c_2):

***$c_2(E)$*=1.** Оценим $\chi(E(1))$. Ввиду неотрицательности $c_3(E)$ [3] $\chi(E(1))\geq 8$. Для вычисления $h^2(E(1))$ воспользуемся теоремой о спектре [2, теорема 2.2] $h^2(E(1))=h^1(O_Q(k+2))$, где $\{k\}$ – спектр пучка E. Из той же теоремы следует, что $k\leq 1$, значит $h^2(E(1))\leq h^1(O_Q(3))=0$, то есть $h^0(E(1))\geq 7$, что доказывает 2).

***$c_2(E)$*=2.** Аналогично предыдущему случаю имеем $\chi(E(1))\geq 3$, $h^2(E(1))=h^1(O_Q(k_1)\oplus O_Q(k_2)(2))$, где $\{k_1,k_2\}$ – спектр пучка E. Нетрудно видеть, что «максимальным» спектром является $\{1,0\}$, а значит $h^2(E(1))\leq h^1(O_Q\oplus O_Q(1)(3))=0$, то есть $h^0(E(1))\geq 3$, что доказывает утверждение 2).

Лемма 1.5. *Пусть E – рефлексивный пучок ранга 2 на квадрике Q с $c_1(E)=0$ и $c_2(E)=1$, тогда E – нестабилен.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что пучок E стабилен, тогда по лемме 1.4. пучок $E(1)$ имеет сечения. Таким образом, получаем точную тройку $0\to O_Q(-1)\to E\to I_{C,Q}(1)\to 0$, где $\deg C=3$. Но тогда $h^0(E)=h^0(I_{C,Q}(1))>0$, то есть пучок E имеет сечения, а значит он нестабилен.

Лемма 1.6. *Пусть* $[\mathrm{E}]\in \mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$, *тогда* Е *– стабильный пучок.*

Доказательство. Предположим противное, то есть существует пучок $[\mathrm{E}]\in \mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$ – полустабильный, но не стабильный. Это означает, что имеется точная тройка $0\to L_1\to \mathrm{E}\to L_2\to 0$, где

$$p_{L_1}(m) = p_E(m) = p_{L_2}(m), \qquad (1.5)$$

Откуда следует $c_1(L_1)=c_1(E)=c_1(L_2)=0$. Тогда $L_i = I_{Z_i,Q}$, где $l(Z_1\cap H)+l(Z_2\cap H)$, а H – общее гиперплоское сечение квадрики. Нетрудно видеть, что ввиду (1.5) Z_i – прямая с, быть может, добавленными точками. Другими словами, имеем точные тройки:

$$0 \to \kappa_i \to \mathrm{O}_{Z_i} \to \mathrm{O}_{l_i} \to 0, \qquad (1.6)$$

где κ_i – артиновы пучки, а l_i – приведенные прямые.

Обозначим $d_i=l(\kappa_i)\geq 0$, нетрудно видеть, что для выполнения условия (1.5) необходимо $d_1=d_2$. С другой стороны, имеем $c_t(\mathrm{E}) = c_t(I_{Z_2,Q})c_t(I_{Z_2,Q})$, откуда $d_1+d_2=1$, что дает противоречие.∎

Лемма 1.7. *Пусть* $[\mathrm{E}]\in \mathrm{M}_Q(2;0,2,0)$, *тогда* Е *и* $E=\mathrm{E}^{\vee\vee}$ *– стабильные пучки, причем факторпучок* E/E *– артинов и* $h^0(\mathrm{E}(1))>0$.

Доказательство. Рассмотрим точную тройку:

$$0 \to E \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathrm{E} \to \kappa \to 0.$$

В силу артиновости пучка κ

$$h^0(\kappa(1)) = h^0(\kappa) = \frac{1}{2}c_3(\kappa) = \frac{1}{2}c_3(E).$$

Из вышеупомянутой теоремы о спектрах следует, что $c_3(E)\le 4$, следовательно, h^0(к (1))≤2. По лемме 1.4. $h^0(E(1))\ge 3$. Следовательно, $h^0(E(1))\ge 1$̊

Это означает, что любой пучок мы можем получить, рассматривая его рефлексивную оболочку как конструкцию Серра от кривых степени 4 на квартике.

§2. Эллиптическая квартика ${}^1C^4$

Пусть ${}^1C^4$ – эллиптическая квартика, тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 2.1. *Пусть* $E=S({}^1C^4,\langle s\rangle)$, *где* $s\in \mathrm{Ext}^1(I_{{}^1C^4},Q_2)$, *тогда*

1) *пучок E рефлексивен;*
2) $c_t(E)=1+2[l]t^2+4[p]t^3$*;*
3) *пучок E нестабилен по Гизекеру.*

Доказательство. Пучок E рефлексивен в силу того, что ${}^1C^4$ – гладкая приведенная кривая, являющаяся локально полным пересечением. Утверждение 2) доказывается простым вычислением многочлена Черна пучка E.

3) Рассмотрим расширение, задающее пучок

E:$\xi: 0 \to O_Q(-1) \to E \to I_{{}^1C^4,Q}(1) \to 0$. Так как $h^0(O_Q(-1))=0$, а $h^0(I_{{}^1C^4,Q}(1)) > 0$ (из-за того, что ${}^1C^4\subset \mathbf{P}^3$), то $h^0(E)>0$, то есть E имеет сечение, и следовательно, нестабилен.̊

§3. Нормкубика и прямая ${}^0C^3\coprod l$

Рассмотрим теперь кривую ${}^0C^3\coprod l$ – несвязное объединение нормкубики ${}^0C^3$ и прямой l.

Предложение 3.1. *Пусть* $E:=S({}^0C^3\coprod l, \langle\xi\rangle)$, *где* $\xi \in \mathrm{Ext}^1(I_{{}^0C^3\coprod l,Q}(1), O_Q)$

1) $c_t(E)=1+2[l]t^2$*;*
2) E *не является рефлексивным;*
3) E *нестабилен по Гизекеру.*

Доказательство. Утверждение 1) доказывается простым вычислением многочлена Черна.

Докажем утверждение 2): рассмотрим

$\mathrm{Ext}^1(I_{{}^0C^3\coprod l,Q}(1), O_Q(-1)) = H^0(Ext^1(I_{{}^0C^3,Q}(1), O_Q(-1))) \oplus H^0(Ext^1(I_{l,Q}(1), O_Q(-1)))$, где $H^0(Ext^1(I_{l,Q}(1),O_Q(-1)))=0$, откуда следует, что $l\subset sing E$, то есть пучок E не является рефлексивным.

Докажем 3): нетрудно видеть, что пучок $E=E^{\vee\vee}$ задается расширением $\xi: 0 \to O_Q(-1) \to E \to I_{C_3,Q}(1) \to 0$, где пучок E очевидно нестабилен, тогда (см. лемма 1.3) пучок E также нестабилен.̊

§4. Коника и прямые

Предложение 4.1. *Следующие кривые не являются нулями сечений пучков* $E(1)$*, где* $E=E^{\vee\vee}$*, для некоторого стабильного пучка* E *ранга 2 без кручения на* Q *с* $c_1(E)=0$ *и* $c_2(E)=2$:

1) *две непересекающиеся прямые и коника;*
2) *четыре непересекающиеся прямые.*

Доказательство. Рассмотрим кривую $C=C_2\coprod l_1\coprod l_2$, где C_2 – коника, а l_i (i=1,2) – две прямые, и рассмотрим пучок $E=S(C_2\coprod l_1\coprod l_2,\langle\xi\rangle)$, где $\xi\in \mathrm{Ext}^1(I_{C_2\coprod l_1\coprod l_2,Q}(1),O_Q(-1))$. Заметим однако, что

$\mathrm{Ext}^1(I_{C_2\coprod l_1\coprod l_2,Q}(1),O_Q(-1)) = Ext^2(O_{C_2}(1),O_Q(-1))\oplus Ext^2(O_{l_1}(1),O_Q(-1))\oplus$

$Ext^2(O_{l_2}(1),O_Q(-1))$, где $Ext^2(O_{l_i}(1),O_Q(-1))=0$, то есть аналогично прошлому параграфу $l_i\subset singE$, то есть E не является рефлексивным.

Вычислим многочлен Черна полученного пучка $c_t(E)=c_t(O_Q(-1))$. $c_t(I_{C_2\coprod l_1\coprod l_2,Q}(1)) = 1+2[l]t^2-2[p]t^3$. Необходимо заметить, что, если исправить $c_3: 0\to E\to \tilde{E}\to \mathbf{k}_x\to 0$, то у пучка $\tilde{E}$ очевидно появится кручение.

2) Рассмотрим теперь объединение четырех непересекающихся прямых. Пусть пучок E имеет нулями сечений $E(1)$ четыре непересекающиеся прямые. Тогда имеется точная тройка:

$$\xi: 0\to O_Q(-1)\to E\to I_{l_1\coprod l_2\coprod l_3\coprod l_4,Q}(1)\to 0, \tag{4.1}$$

где $\xi\in \mathrm{Ext}^1(I_{l_1\coprod l_2\coprod l_3\coprod l_4,Q}(1),O_Q(-1))$; но

$\mathrm{Ext}^1(I_{l_1\coprod l_2\coprod l_3\coprod l_4,Q}(1),O_Q(-1)) = \oplus_{i=1}^4 H^0(Ext^2(\mathrm{O}_{l_i}(2),O_Q)=0$. Это означает, что тройка (4.1) распадается, что противоречит и стабильности, и рефлексивности пучка E.

Библиографический список

1. Артамкин Д.И. Компонента не локально свободных полустабильных пучков ранга два на трехмерной квадрике // Совершенствование структуры и содержания физико-математического образования. Материалы конференции «Чтения Ушинского». Ярославль: Изд-во ЯГПУ. 2004.
2. Ein L., Sols I. Stable vector bundles on quadric hypersurfaces // Nagoya Math. J., 1986. V.96. P.11–22.
3. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann., 1980. V.254. P.121–176.
4. Maruyama M. Moduli of stable sheaves, I // J. Math. Kyoto Univ, 1977. V.17. P.91–126.
5. Maruyama M. Moduli of stable sheaves, II // J. Math. Kyoto Univ, 1978. V.18. P.557–614.
6. Ottaviani G., Szurek M. On Modilu of Stable 2-Bundles with Small Chern Classes on Q_3 // Annali di Matematica pura ed applicata, 1994. Vol.CLXVII (VI). P.191–241.
7. Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир. 1984.