В. Ф. Чаплыгин

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИЗА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ

Дискуссия о том, быть или не быть элементам математического анализа в школьной программе, длится уже более тридцати лет. Сторонников и противников «быть» предостаточно. В лагере противников большинство составляют вузовские преподаватели. Их основные возражения: во-первых, в школе невозможно изложить основные понятия математического анализа достаточно строго; во-вторых, основная масса учителей не в состоянии это грамотно сделать; в-третьих, математический анализ изучается в высшей школе. Но если учесть, что далеко не все выпускники средней школы будут изучать высшую математику в вузе, а общекультурная составляющая является одной из главных в школьном образовании, то описанная выше концепция нуждается в пересмотре. На наш взгляд, право на существование имеет компромиссная точка зрения. Излагать анализ в школе так, как это делается сейчас, нельзя. Исходя из общекультурной значимости математики, во главу угла необходимо поставить идейную, понятийную ее сторону, следуя при этом исторической схеме развития понятий развития понятий, их генезису (подробнее см. [1]). До сих пор преподавание анализа сводилось к чистому формализму. Кое-как давались определения, которые усваивались формально, приводились факты без их доказательства, зачастую искажалась суть понятия, одно утверждение подменялось другим, все это сопровождалось грубыми ошибками учителей; это приводило к весьма поверхностным, а зачастую и к ложным знаниям, что абсолютно недопустимо. Если нет возможности провести строгое доказательство, об этом надо просто сказать учащимся, намечая дальнейшую перспективу. Таким образом, проблема перемещается из области «что?» в область «как?». Автор предлагает свое видение методики введения основных понятий математического анализа в школе, к которым относятся понятия действительного числа, предела, непрерывности, дифференцируемости, первообразной, интеграла. Эти заметки ни в коем случае нельзя рассматривать как методическую разработку соответствующей темы, а лишь как методические советы или рекомендации, часть из которых исторически доказала право на существование; некоторые соображения принадлежат автору.

Авторская точка зрения на формирование понятия действительного числа изложена в [2]. Предлагается использовать в основном наглядно-интуитивный уровень строгости. Под действительным числом предлагается понимать бесконечную десятичную дробь (при этом исключаются из рассмотрения периодические дроби с периодом, состоящим только из нулей). Уместно привести учащимся определение числа, данного И. Ньютоном в 1707 году во «Всеобщей арифметике»: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принимаемой нами за единицу». Это определение исторически оправдано и позволяет интерпретировать множество действительных чисел R как множество точек числовой оси, сводя дело к измерению отрезков, т.е. их отношению. Это, в свою очередь, может быть связано с алгоритмом Евклида и проблемой соизмеримости отрезков. Как известно, соизмеримость отрезков приводит к рациональному, а несоизмеримость − к иррациональному числу. Тем самым

устанавливается изоморфизм между множеством R как совокупности бесконечных десятичных дробей и множеством точек числовой прямой, что дает возможность показать учащимся одно из важнейших свойств множества R − непрерывность, которым множество рациональных чисел Q не обладает.
Только после того, как идея непрерывности множества действительных чисел будет воспринята учащимися хотя бы на наглядно-интуитивном уровне, можно перейти к понятию предела числовой последовательности. Как ни излагать теорию предела последовательностей (начинать с бесконечно малых последовательностей, а потом переходить к общей теории или сделать это сразу), следует начинать не с формального определения, а проделать работу, которая формирует так называемое предпонятие (по Л. С. Выготскому).
Учащимся предлагается рассмотреть поведение конкретных последовательностей, например, $x_n = \frac{n+1}{n}$, $y_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$, $z_n = n^2$, $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Вместе с ними следует разобрать, как ведут себя эти последовательности. Члены последовательности x_n с неограниченным ростом n, монотонно убывая, приближаются сколь угодно близко к 1, члены последовательности y_n приближаются к 0, при этом все ее нечетные члены y_{2k+1} равны нулю. Что касается последовательностей z_n и u_n, то не существует числа, к которому приближались бы их члены. При этом следует обратить внимание учащихся на неограниченность z_n и колеблемость u_n, приближение четных ее членов u_{2k} к 1, а нечетных u_{2k+1} к –1. После проделанной работы можно дать определение предела числовой последовательности на языке ε–N, разъяснить смысл и роль каждого квантора, участвующего в нем, показать, к чему приведет замена одного из них на противоположный и вновь поработать с приведенными ранее примерами уже на более высоком уровне. Затем следует вместе с учащимися построить примеры последовательностей, не имеющих предела (либо из-за неограниченности, либо из-за наличия у нее различных предельных точек), а также последовательностей, имеющих пределом наперед заданное число. Нам представляется, что при изучении бесконечно малых последовательностей очень важно довести до сознания учащихся, что не члены ее сами по себе бесконечно малы, а это − тенденция в ее поведении, означающая попадание всех ее членов, начиная с некоторого ее номера в выбранный интервал (−ε, ε), где ε − произвольно малое положительное число. Очень важную роль играет теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. На наш взгляд, при доказательстве теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного последовательностей следует подчеркнуть, что их сходимость носит достаточный характер, и привести примеры, в которых обе последовательности не имеют предела, а их сумма или разность имеют, одна или две − не имеют, а их произведение − имеет.
Изучение предела функции в точке также лучше начать с формирования предпонятия, для чего можно рассмотреть поведение функций $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$, $\varphi(x)=(x-1)^2$, $\psi(x)=2^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$, $\chi(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$, $\eta(x)=\sin\frac{1}{x-1}$, $\tau(x)=x-1$ при $x\neq1$, $\tau(1)=2$ при $x\to1$. Обратить внимание учащихся на несовпадение односторонних пределов для функций $f(x)$ и $\chi(x)$, на равенство односторонних пределов для функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\tau(x)$, а также на тот факт, что функции $\varphi(x)$ и $\tau(x)$ определены в точке $x=1$, а $\psi(x)$ − не

определена. Что касается функции $\eta(x)$, то она в сколь угодно малой окрестности точки $x=1$ принимает любое значение из промежутка [–1; 1]. После этого можно дать определение функции в точке и показать, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\tau(x)$ имеют предел в точке $x=1$, а остальные - нет. Лучше начинать с определения Гейне, то есть идти от определения числовой последовательности, только ни в коем случае не допускать ошибки, состоящей в том, что на двух различных конкретных последовательностях x_n' и x_n'', сходящихся к a, доказывается совпадение пределов $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$ и отсюда делается вывод, что предел функции в точке a существует. Безусловно необходимо брать произвольную последовательность x_n (неконкретную), сходящуюся к a, и доказывать, что последовательность $f(x_n)$ имеет предел, не зависящий от выбора x_n. А вот в случае, когда функция предела в точке a не имеет, достаточно выбрать две конкретные последовательности x_n' и x_n'', сходящиеся к a, для которых не имеет места равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$. Определение предела функции в точке a по Коши на языке ε–δ усваивается труднее и требует большей работы с ним. При этом полезно объяснить хотя бы на наглядном уровне, что значения аргумента определяют близость значений функции к своему пределу, т. е. значения функции тем ближе к пределу, чем значения аргумента ближе к a. Необходимо довести до сознания учащихся, что значение функции в точке a никакого отношения к существованию предела в этой точке не имеет. Большую трудность вызывает понятие предела функции на бесконечности и бесконечный предел функции в точке, а ведь они играют важную роль при нахождении асимптот графика функции. Очень полезно при работе с определениями вместе с учащимися построить их отрицания, но не сводить это к формальной замене кванторов на противоположные.

Довольно часто, занимаясь практическим вычислением пределов, учителя используют понятия непрерывности, не введя его, считая его априори имеющим место. Так, при отыскании пределов последовательностей $\sin\frac{1}{n}$ или $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ произносятся слова: при $n\to\infty$ $\frac{1}{n}\to 0$, но $\sin 0=0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=0$. Примерно такие же рассуждения приводят к значению $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$. Этот момент крайне нежелателен. Он смазывает все дальнейшие рассуждения о непрерывности, и учащиеся будут считать непрерывность само собой разумеющимся фактом. Поэтому лучше сначала ввести определение непрерывности функции в точке и аккуратно доказать непрерывность элементарных функций x^n, $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ и др. Доказательство непрерывности функций $\sqrt[n]{x}$ и $\arcsin x$ можно провести, опираясь на монотонность и непрерывность функций x^n и $\sin x$, к которым они обратны. В школьном курсе явно или неявно используются свойства функций, непрерывных на отрезке (имеются в виду теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши). Весьма поучительным, на наш взгляд, является следующий пример, взятый из [3]. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$ на множестве B рациональных точек отрезка [1; 2], т. е. $B=[1; 2]\cap Q$. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве B, так как для любой последовательности точек $r_n\in B$, сходящейся к $r_0\in B$, следует $f(r_n)\to f(r_0)$. Но ожидаемыми свойствами функция $f(x)$ не обладает. Она не ограничена на множестве B. Легко видеть, что на последовательности $\{r_n'\}$ 1; 1,4; 1,41; 1,414... (рациональные приближения $\sqrt{2}$

с недостатком) $f(r_n') \to -\infty$, а на последовательности $\{r_n''\}$ 2; 1,5; 1,42; 1,415... (рациональные приближения $\sqrt{2}$ с избытком) $f(r_n'') \to +\infty$. Множество ее значений состоит из рациональных чисел, но не совпадает с Q. Например, числа 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ не являются ее значениями. Рассматривая теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций, не лишне обратить внимание учащихся на тот факт, что непрерывной может оказаться сумма, разность, произведение, частное и композиция функций $f(x)$ и $g(x)$ не только в случае их непрерывности. Так, если $f(x)=1$ для рациональных x и $f(x)=0$ для иррациональных x, а $g(x)=-1$ для рациональных x и $g(x)=0$ для иррациональных x, то функция $f(x)+g(x)$ тождественно равна нулю и, следовательно, непрерывна. Если функция $f(x)=1$ в рациональных точках x и $f(x)=-1$ в иррациональны, а функция $g(x)=x^2$, то $g(f(x))=1$ для всех x и поэтому непрерывна. И еще одно небольшое, но важное замечание. Автору неоднократно приходилось слышать от учащихся и читать в их письменных работах слова: «функция $f(x)$ непрерывна, так как она дифференцируема (имеет производную)». Само по себе это утверждение истинно, но ведь функция может быть непрерывной в точке, не имея в ней производной, и более того, быть непрерывной на всей действительной оси и не иметь производной ни в одной точке (см., например, [3]).Да и вообще факт непрерывности устанавливается, как правило, проще, чем дифференцируемости.

Перейдем к понятию производной и дифференцируемости – одному из основных понятий математического анализа. Мы считаем, что перед тем, как ввести это понятие, имеет смысл рассмотреть задачи, к нему приводящие. Можно привести задачи о касательной к графику функции и мгновенной скорости материальной точки. Это оправдано тем, что в таком случае становится ясным генезис понятия и дальнейшие его приложения. Следует заметить, что две различные задачи приводят к одной и той же математической модели. И, наконец, в задаче о касательной хорошо просматривается основная сущность дифференцируемости, которая состоит в возможности локального приближения функции, имеющей производную в точке, линейной функцией.

Выскажем собственную точку зрения о введении определения касательной. Спросите выпускника школы, что такое касательная к кривой? Многие ответят, что это прямая, имеющая с кривой одну общую точку, что, конечно, неверно, но тем не менее объяснимо, ибо опыт учащихся располагает лишь определением касательной к окружности. Опровергнуть ошибочность определения не составляет труда, достаточно взять параболу $y=x^2$ и прямую $x=a$. Как же подвести учащихся к определению касательной к графику функции? Предлагается следующая схема. Во-первых, устанавливается равносильность двух определений касательной к окружности: 1) это − прямая, имеющая с окружностью одну общую точку; 2) это − прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку. И, наконец, вводится третье определение касательной к окружности в точке M_0: 3) это − предельное положение (предельная прямая) секущих M_0M при стремлении точки M по окружности к точке M_0. Действительно, легко показать учащимся (рис.1), что угол $\angle OM_0M=\alpha\to\frac{\pi}{2}$ при $M \to M_0$, так как $\beta\to 0$, а $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}$ и, следовательно, угол $\angle MM_0T=\frac{\beta}{2}$, который образует секущая с прямой M_0T, перпендикулярной OM_0, становится сколь угодно малым. Это и означает, что M_0T − предельная прямая для секущих

MM_0. Но прямая M_0T по второму определению является касательной к окружности. Круг замкнулся, мы получили три равносильных определения.

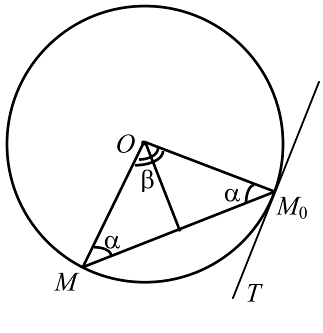

Рис. 1

После этого третье определение переносится на случай касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$. Предположим, что касательная в точке M_0 существует. Исходя из геометрических соображений и учитывая непрерывность функции tg x, получаем, что угловой коэффициент касательной

$$k=\lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}\alpha=\lim_{x\to x_0}\frac{MK}{M_0K}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Задача о мгновенной скорости приводит к соотношению $v(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$, где $s(t)$ − путь, пройденный материальной точкой к моменту времени t, а $v(t_0)$ − скорость в момент времени $t=t_0$. После рассмотрения этих двух задач можно дать формальное определение производной функции в точке. Из предельного соотношения, определяющего производную $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, следует, что $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)$, где $\alpha(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\to 0$ при $x\to x_0$.

Выражение $f'(x_0)\Delta x$ представляет собой дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 для $\Delta x=x-x_0$. Здесь же уместно дать геометрическую и механическую интерпретацию дифференциала. Полезно привести примеры функций, не имеющих производной в одной, нескольких или даже бесконечном множестве точек: $|x^2-3x+2|$, $|x^3-4x|$, $|\sin x|$, которые не имеют производных соответственно в точках $\{1;2\}$, $\{0; 2; -2\}$, $\{\pi n\}$, где $n\in Z$. Проиллюстрировав это на графиках функций, можно предложить учащимся самим привести примеры функций, не имеющих производной в одной, двух, трех, пяти точках, причем точки можно не задавать конкретно или задать. Следует обратить внимание учащихся на случаи, когда односторонние производные обращаются в $\pm\infty$, отметить особенности поведения функций в соответствующих точках, например, функции $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$. Это необходимо для отыскания экстремумов и построения графиков функций. Изучая теоремы о производной суммы, разности, произведения функций, имеет смысл обратить внимание учащихся на достаточный характер их условий. Легко показать, пользуясь определением, что функции $|x|^2$, $x|x|$, $|x|\sin x$ имеют производные в нуле, хотя $|x|$ этим свойством не обладает. Очень важно поработать с геометрическим смыслом производной. Учащиеся должны понять, что в случае, когда $f'(x)>0$ на некотором промежутке $(a;b)$, то линейная функция $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ для любого $x_0\in(a;b)$ возрастает на этом промежутке а, следовательно, и сама функция $y=f(x)$ возрастает. Можно объяснить, исходя из определения производной, что в случае возрастания дифференцируемой функции $f(x)$ на промежутке ее производная $f'(x)\geq 0$. Можно пойти чуть дальше и показать, что в случае, когда на интервале $(a;\ b)$ существует вторая производная и график функции является выпуклым (вниз) для $x\in(a;b)$, то $f''(x)\geq 0$, а в случае, когда он является вогнутым (выпуклым вверх), то $f''(x)\leq 0$. Это легко увидеть из графических соображений и геометрического смысла производной: так, в первом из указанных случаев $f'(x)$ возрастает, а во втором − убывает. И

последнее: есть смысл найти по определению производные конкретных композиций функций прежде, чем переходить к общему утверждению.
Приведем два примера.
Пусть $f(x)=\sin^2 x$, тогда

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin^2 x-\sin^2 x_0}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}(\sin x+\sin x_0)==2\cos x_0\sin x_0.$$

Мы воспользовались известной учащимся производной функции $\sin x$ и теоремами о пределе суммы и произведения двух функций.
Если $\varphi(x)=\sqrt[3]{\sin x}$, то для $x_0\neq\pi n$, $n\in Z$,

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x_0}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\sin x\sin x_0}+\sqrt[3]{\sin^2 x_0}}=$$

$$=\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x_0}}.$$

Причем перед тем, как будут рассмотрены эти примеры, можно задать учащимся вопросы, чему равняются производные функций $\sin^2 x$ и $\sqrt[3]{\sin x}$. Довольно часто для первой из производных дают ответы 2 $\sin x$ или $\cos^2 x$, и в этом нет ничего удивительного. После разбора примеров все станет на свои места и можно сформулировать теорему о производной сложной функции.
Перейдем к понятиям определенного интеграла как семейства первообразных и определенного интеграла. С неопределенным интегралом в школе особых проблем не возникает, не считая доказательства того факта, что две первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ отличаются на постоянную, или иначе: для любых двух первообразных $F(x)$ и $\Phi(x)$ найдется константа C такая, что $\Phi(x)= F(x)+C$ для всех x из интервала $(a; b)$. Строгое доказательство этого утверждения опирается, как известно, на теорему Лагранжа, или точнее, следствие из нее: функция $\varphi(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $\varphi'(x)=0$ для всех $x\in(a; b)$. Но теорема Лагранжа не может быть строго доказана в школе, хотя можно привести ее формулировку и истолковать ее геометрически, а затем, опираясь на формулу конечных приращений, получить нужное следствие. Сам по себе факт представления **любой** первообразной на интервале $(a;b)$ для функции $f(x)$ в виде $F(x)+C$, где $F(x)$ − одна из первообразных, а C − произвольное действительное число, чрезвычайно важен с методологической точки зрения, что явно недооценивается преподавателями. Обычно учащиеся доказывают упомянутый выше факт следующим рассуждением: $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)$. Но ведь это доказывает лишь, что любая функция вида $F(x)+C$ является первообразной, не не доказывает того, что все первообразные объединены выражением $F(x)+C$. А ведь с аналогичными ситуациями им приходится встречаться не раз, например, при построении **общего** решения системы линейных алгебраических уравнений, линейных дифференциальных уравнений, линейных систем с периодическими коэффициентами, линейных интегральных уравнений и т. д. Кстати, если предложить учащимся записать общее решение системы уравнений $\begin{cases}x+y=2,\\2x+2y=4,\end{cases}$ то возникнет проблема. И еще одно замечание по поводу первообразной. Для функций x^α, где $\alpha\le -1$, не определена первообразная при x=0: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, если $\alpha<-1$, и $\ln x$, если $\alpha=-1$. Их можно рассматривать на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$.
Несколько лет назад на Соросовской олимпиаде была предложена задача: найти такую первообразную для функции $f(x)=\frac{1}{x^3}$, график которой имеет с графиком функции $y=|x|$ ровно три общие точки. Задача смутила многих учителей,

так как первообразные имеют вид $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+C$ $(x\neq 0)$, и создается впечатление, что графики двух четных функций должны иметь четное количество общих точек, если $x\neq 0$. На самом деле первообразные могут быть заданы на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$ разными функциями: $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+a$ для $x>0$, и $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+b$ для $x<0$, где a и b не обязаны совпадать, и потому их можно подобрать так, чтобы одна из ветвей графика первообразной дважды пересекала график функции $y=|x|$, а вторая - коснулась его, например, $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{2}$, если $x>0$, и $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$, если $x<0$ (подробнее см.[4]).

Остановимся на понятии определенного интеграла. К нему лучше идти от задач о площади криволинейной трапеции и расстоянии, пройденном материальной точкой, движущейся прямолинейно с переменной скоростью. Эти задачи приводят к необходимости нахождения пределов сумм вида $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$. После чего следует дать определение интеграла, разъяснить, как понимается предел в этом случае, получить свойства интеграла. Вводить интеграл как приращение первообразной, на наш взгляд, абсолютно недопустимо. В этом случае теряется идея интеграла, пропадает его генетическое происхождение, история развития, затрудняется выход на его многочисленные приложения и на другие его виды (криволинейные, поверхностные, кратные и т. д.), теряется связь интеграла с теорией меры, и, тем самым, дело сводится к чистому формализму. В 1998 году на выпускном экзамене в школе предлагалось вычислить интеграл $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$, где $g(x)=3^x$ для $0\leq x\leq 1$ и $g(x)=5^x$ для $1<x\leq 2$. Задача повергла многих учителей в шок, ведь функция $g(x)$ разрывна в точке $x=1$.

Нам кажется, что можно больше опираться на геометрический смысл интеграла при выводе его свойств, в том числе и основного свойства интеграла с переменным верхним пределом $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ для случая непрерывной функции $f(x)$, откуда до формулы Ньютона-Лейбница рукой подать. Но, конечно, необходимо объяснить учащимся, что изменится, если подынтегральная функция $f(x)$, будучи непрерывной, меняет знак на отрезке $[a; b]$, или как трактовать интеграл в случае, когда функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число точек разрыва первого рода.

Библиографический список

1. Чаплыгин В. Ф. Общекультурные и гносеологические аспекты курса "История и методология математики" // Ярославский педагогический вестник. 2000. №3. С. 137-141.
2. Чаплыгин В. Ф. Задачи в формировании понятия действительного числа // Математика в школе. 1997. №1 С. 26-27.
3. Гелбаум Б.,Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
4. Чаплыгин В. Ф., Чаплыгина Н. Б. Задачи с параметрами по алгебре и анализу. Ярославль, 1998.
5. Смирнов Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1997. 323 с.