В.В. Афанасьев, А.А. Соловьева

АНАЛОГИЯ ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аналогия знает все секреты природы.

И. К е п л е р

Среди различных форм умозаключений, наиболее часто используемых в практической и научной деятельности человека, важное место принадлежит умозаключениям по аналогии. Аналогия (греч. analogia - сходство, соответствие) представляет собой сходство, подобие предметов (явлений) в каких-либо свойствах, признаках, отношениях. Научных открытий, совершаемых по аналогии, множество. Закономерность распространения звука в воздухе была обнаружена на основе сравнения этого явления с распространением волн на поверхности воды, а природа света устанавливалась по аналогии со звуком. Д.И. Менделеев, открыв периодическую систему элементов, посредством аналогии предсказал свойства новых элементов. Примером использования аналогий служит и возникновение аналоговых математических машин, которые основаны на аналогии между системами физических и математических объектов.

Аналогия нашла свое применение не только в естествознании, технике и точных науках, но и в гуманитарной сфере: так, в теории стиха, например, строй русского силлаботонического стиха (утвердившегося со времен Ломоносова и господствовавшего до Маяковского) рассматривается по аналогии с греческим и силлабическим стихосложением на основе сходства в чередовании интенсив. В журналистике метод аналогии используется для создания креативных, ярких заголовков статей. На этом методе работают некоторые компьютерные программы по созданию заголовков, одним из примеров которых может служить программа "HeadLiner/Заголовщик" [6].

Аналогия может быть использована при экономическом анализе определенного исторического периода в развитии общества. Учитывая характер развития страны, многоукладность ее экономического развития целесообразно сравнить со сходными признаками развития другой страны, прошедшей подобные периоды в своей истории. Метод аналогии в таком случае даст возможность учесть позитивное и негативное в развитии общества, избежать промахов и ошибок.

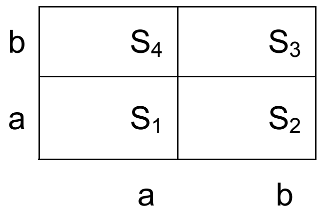
Умозаключения по аналогии присутствуют и в логике рассуждений врача, который ставит диагноз по сходству признаков болезни. С помощью суждений по аналогии юристы решают правовые вопросы. Сравнение конкретного уголовного дела с уже расследованными способствует выявлению сходства между ними, позволяет обнаружить ранее неизвестные признаки и обстоятельства преступления.

Воспитание этого необходимого во многих сферах человеческой деятельности качества ума следует начинать с малого, чтобы оно могло проявиться в большем, и занятия математикой в этом могут послужить одним из основных средств. Как известно, целью математического образования является не только усвоение определенного набора фактов, но и развитие мышления.

Сопоставление явлений и умозаключения по аналогии является основой при разработке новых гипотез, выявлении новых закономерностей. Ниже предлагаются новые варианты решений хорошо известных школьному учителю и учащимся арифметических задач, поиск которых осуществлялся на основе выводов по аналогии. Эти варианты продолжают идею геометрической интерпретации суммирования числовых рядов, изложенную одним из авторов в [1].

Пример 1. Представить выражение $(a+b)^2$ в виде суммы слагаемых.

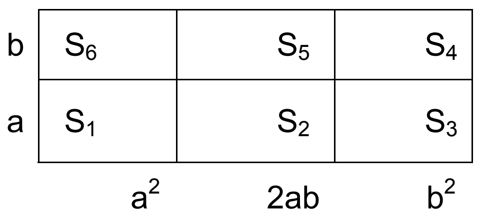
Решение. Рассмотрим квадрат со стороной $(a+b)$. Разобьем его стороны на отрезки a и b, как показано на рисунке. Тогда площадь квадрата будет равна сумме площадей двух квадратов и двух прямоугольников:



$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$$
$$= a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2 .$$

Пример 2. Представить третью степень суммы двух чисел $(a+b)^3$ в виде суммы слагаемых.

Решение. Выражение $(a+b)^3$ представимо как произведение сомножителей $(a+b)$ и $(a+b)^2$. Рассмотрим прямоугольник со сторонами, равными соответствующим сомножителям, при этом сторону $(a+b)^2$ разбиваем на отрезки a^2, $2ab$ и b^2, то есть возвращаемся назад к ранее разложенной на слагаемые формуле квадрата двучлена, реализуя метод рекурсии.



$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = S_1 + S_2 + S_3 +$$
$$+ S_4 + S_5 + S_6 = = a^3 + 2a^2b + ab^2 + b^3 +$$
$$+ 2ab^2 + a^2b = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

В приведенных примерах выражение $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$ представляем как произведение двух сомножителей. В силу того, что площадь прямоугольника находится как произведение длин его сторон, формулу второй степени двучлена рассматриваем как площадь квадрата (частный случай прямоугольника) со стороной $(a+b)$, куб двучлена представляем как площадь прямоугольника со сторонами $(a+b)$ и $(a+b)^2$. При этом мы опираемся на выводы по аналогии свойств, которые применяются в тех случаях, когда с объекта на объект (с явления на явление) переносится информация, представляющая собой приписывание объекту (явлению) свойства [3.С. 74].

Пример 3. Представить выражение $(a+b)^4$ в виде суммы слагаемых.

При разложении формулы $(a+b)^4$, если размышлять по аналогии с предыдущими примерами, возможны два варианта рассуждений. Первый вариант состоит в том, что $(a+b)^4$ мы видим как произведение первой и третьей степеней суммы $(a+b)$, то есть $(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)^3$, и рассматриваем площадь прямоугольника со сторонами $(a+b)$ и $(a+b)^3$. Второй заключается в том, что $(a+b)^4$ представляем как площадь квадрата со стороной $(a+b)^2$.

Решение 1. Рассмотрим прямоугольник со сторонами $(a+b)$ и $(a+b)^3$, разбивая стороны в соответствии с методом рекурсии, как описано выше.

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_5 + S_7 + S_8 =$$

b	S_8	S_7	S_6	S_5
a	S_1	S_2	S_3	S_4
	a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3

$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 3ab^3 + 3a^2b^2 + a^3b =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 .$$

Решение 2. $(a+b)^4$ рассмотрим как площадь квадрата со стороной $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, разбитой на отрезки.

b^2	S_7	S_8	S_9
2ab	S_6	S_5	S_4
a^2	S_1	S_2	S_3
	a^2	2ab	b^2

$$(a+b)^4 = \left((a+b)^2\right)^2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 =$$

$$= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2ab^3 + 4a^2b^2 + 2a^3b + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 .$$

Два варианта решения возможны и при разложении формулы $(a+b)^5$.

Пример 4. Представить пятую степень суммы двух чисел $(a+b)^5$ в виде суммы слагаемых.

Решение 1. Рассмотрим прямоугольник со сторонами $(a+b)$ и $(a+b)^4$, разделив их, используя результат примера 3.

b	S_{10}	S_9	S_8	S_7	S_6
a	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
	a^4	$4a^3b$	$3a^2b^2$	$3ab^3$	b^4

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10} =$$
$$= a^5 + 4a^4b + 6a^3a^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + b^5 + 4ab^4 + 6a^2b^3 + 4a^3b^2 + + a^4b =$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Решение 2. Рассмотрим прямоугольник со сторонами $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$, разделив их, как показано на рисунке.

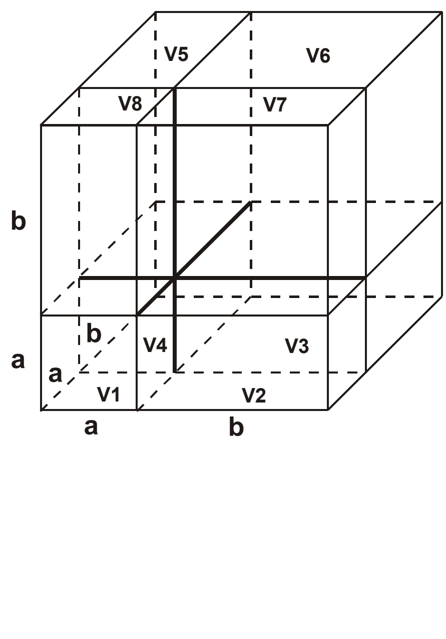
b^2	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
$2ab$	S_8	S_7	S_6	S_5
a^2	S_1	S_2	S_3	S_4
	a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3

$$(a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10} + S_{11} + S_{12} =$$
$$= a^5 + 3a^4b + 3a^3b^2 + a^2b^3 + 2ab^4 + 6a^2b^3 + 6a^3b^2 + 2a^4b + a^3b^2 + 3a^2b^3 + 3ab^4 + b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Итак, $(a+b)^n$ можно рассматривать как произведение двух выражений $(a+b)^m$, $(a+b)^{n-m}$ и представить как площадь прямоугольника со сторонами, равными соответствующим сомножителям (двухмерная геометрическая модель). Таким образом, в процессе поиска решений задач с помощью выводов по аналогии мы используем моделирование, и это не случайно, потому что умозаключения по аналогии являются логической основой метода моделирования [3].

От двухмерной модели возможен переход к трехмерной. Степень двучлена, начиная с третьей, можно рассмотреть как произведение 3-х сомножителей и представить как объем прямого параллелепипеда со сторонами, равными каждому из сомножителей. Появляется еще один вариант решения.

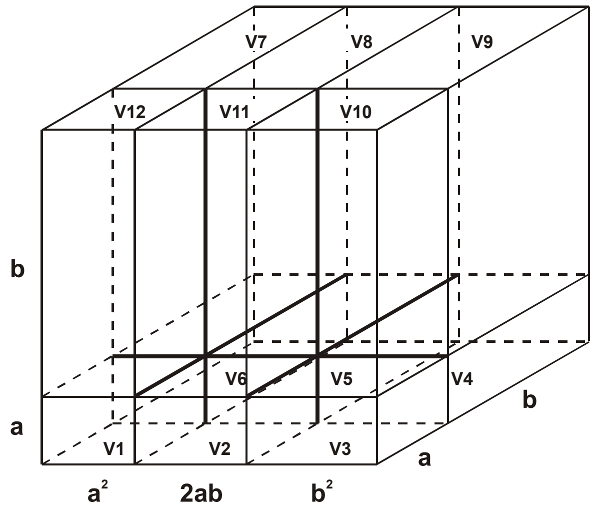
Решение 2 примера 2. Рассмотрим куб со стороной $(a+b)$. Разделим его стороны, как показано на рисунке. Тогда объем исходного параллелепипеда будет равен сумме объемов полученных параллелепипедов:



$$(a+b)^3 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_5 + V_7 + V_8 =$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 + a^2b + ab^2 + b^3 + ab^2 + a^2b =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

При рассмотрении этого решения целесообразно обратить внимание учащихся на то, что прямоугольник на плоскости аналогичен прямому параллелепипеду в пространстве. Здесь проявляется одно из значений греческого слова «аналогия» - «пропорция, отношение», которое нашло свое отражение в еще одном основном типе логических выводов по аналогии отношений [3.С. 74]. Так, система двух чисел 4 и 6 «аналогична» системе двух чисел 8 и 12, так как отношения соответствующих членов этих двух систем согласуются, и отношение прямоугольника к плоскости такое же, как и отношение прямого параллелепипеда к пространству. С одной стороны возьмем отрезок и будем перемещать его параллельно самому себе в направлении прямой, пересекающей под прямым углом содержащую этот отрезок прямую; мы получим прямоугольник. Если возьмем прямоугольник и переместим его параллельно самому себе в направлении прямой, пересекающей под прямым углом содержащую этот прямоугольник плоскость, то получим прямой параллелепипед [4. С. 36].

Решение 3 примера 3. Рассмотрим параллелепипед со сторонами $(a+b)$, $(a+b)$, $(a+b)^2$.

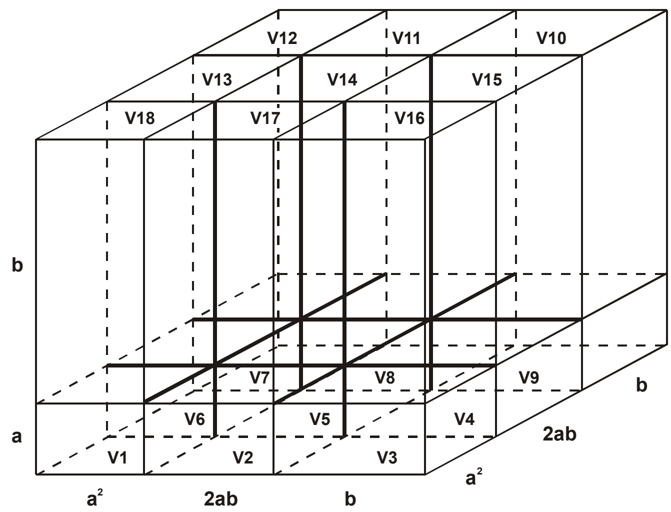


$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)^2 = V_1 + ... + V_{12} =$$

$$= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + ab^3 + 2a^2b^2 + a^3b + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + ab^3 + 2a^2b^2 + a^3b =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Решение 3 примера 4**.** Рассмотрим параллелепипед со сторонами $(a+b)$, $(a+b)^2$, $(a+b)^2$.



$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^2(a+b)^2 = V_1 + ... + V_9 + V_{10} + ... + V_{18} =$$

$$= a^5 + 2a^4b + a^3b^2 + 2a^2b^3 + 4a^3b^2 + 2a^4b + a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4 +$$
$$+ b^5 + 2ab^4 + a^2b^3 + 2a^3b^2 + 4a^2b^3 + 2ab^4 + a^2b^3 + 2a^3b^2 + a^4b =$$
$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 .$$

Следует отметить, что построенные модели являются именно геометрическими (а не графическими, например), потому что при этом мы оперируем геометрическими понятиями: площадь прямоугольника, объем прямого параллелепипеда.

После рассмотрения различных вариантов решений задач с помощью геометрических моделей следует обратить внимание учащихся на то, что в случае, когда для одного и того же явления удается создать несколько разных моделей, целесообразно провести оценку средств моделирования для выбора оптимальной модели, то есть той, которая отражает все необходимые для данного исследования свойства объекта изучения и экономична в отношении затраченных ресурсов. В приведенных выше примерах представления степени двучлена в виде суммы слагаемых оптимальной является двумерная модель - площадь прямоугольника. Однако и построение более сложной трехмерной модели не лишено смысла. Это развивает наглядно-образное мышление, пространственное воображение и позволяет учащимся более глубоко вникнуть в суть метода аналогии.

Пример 1 можно продолжить, если увеличивать не степень суммы, как мы делали выше, а число слагаемых. Геометрической моделью в этом случае выступит площадь квадрата со стороной, равной сумме слагаемых.

Пример 5. Представить выражение $(a+b+c)^2$ в виде многочлена.

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной $(a+b+c)$.

Тогда площадь квадрата будет равна сумме площадей фигур, полученных при разбиении сторон на отрезки *a*, *b*, *c*.

c	ac	bc	c^2
b	ab	b^2	bc
a	a^2	ab	ac
	a	b	c

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc .$$

Пример 6. Представить выражение $(a+b+c+d)^2$ в виде многочлена.

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной $(a+b+c+d)$, состоящей из отрезков *a*, *b*, *c*, *d*.

d	ad	bd	cd	d^2
c	ac	bc	c^2	dc
b	ab	b^2	bc	bd
a	a^2	ab	ac	ad
	a	b	c	d

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\ .$$

Заметив аналогию трех формул из примеров 1, 5, 6, можно высказать предположение, что

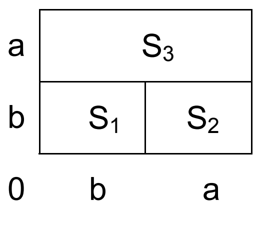
$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 = a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots+a_n{}^2+$$
$$+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_1a_n+2a_2a_3+\ldots+2a_2a_n+2a_3a_4+\ldots+2a_3a_n+\ldots+2a_{n-1}a_n\,.$$

Учитывая, что выводы по аналогии иногда приводят к ложным предположениям, и свидетельств тому из истории развития математики множество, следует предложить учащимся сделать проверку данной гипотезы с помощью метода математической индукции.

Рассмотрим еще одну серию задач, решения которых аналогичны предыдущим по идее и аналогичны друг другу по структуре. Разложение двучленов вида a^n-b^n на множители также предлагается сделать с помощью двумерной геометрической модели. Рассмотрим прямоугольник со сторонами a^m и a^{n-m}, отложив на них отрезки b^m и b^{n-m} (b<a) соответственно. Тогда прямоугольник, площадь которого равна a^n, будет состоять из прямоугольника с площадью, равной вычитаемому b^n, и еще из двух прямоугольников. Таким образом, двучлен a^n-b^n рассматриваем как сумму площадей двух прямоугольников.

Пример 7. Разложить двучлен a^2-b^2 на множители.

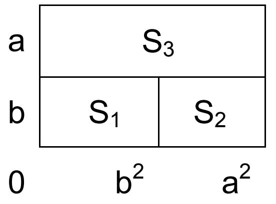
Решение. Рассмотрим квадрат со сторонами, равными *a*. Разделим стороны, как показано на рисунке.



$$a^2-S_1=S_2+S_3=(a-b)b+(a-b)a\,;$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)\,.$$

Пример 8. Представить двучлен a^3-b^3 в виде произведения.

Решение. Рассмотрим прямоугольник со сторонами *a* и a^2.

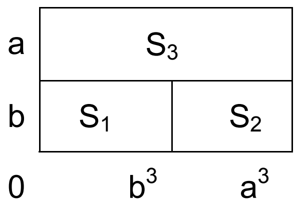


$$a^3 - S_1 = S_2 + S_3 = (a^2 - b^2)b + (a-b)a^2;$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)((a+b)b + a^2) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Пример 9. Разложить двучлен $a^4 - b^4$ на множители.

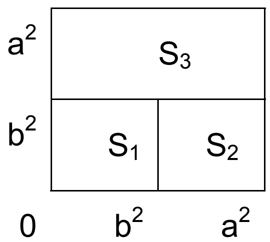
По аналогии с предыдущими примерами при разложении двучлена $a^4 - b^4$ на множители можно рассмотреть прямоугольник со сторонами a и a^3, площадь которого равна a^4, но такую же площадь имеет квадрат со стороной a^2. Следовательно, в этом случае можно предложить два решения.

Решение 1. Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и a^3, разделив их, как показано на рисунке.



$$a^4 - S_1 = S_2 + S_3 = (a^3 - b^3)b + (a-b)a^3;$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)((a^2 + ab + b^2)b + a^3) =$$
$$= (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Решение 2. Рассмотрим квадрат со стороной a^2



$$a^4 - S_1 = S_2 + S_3 = b^4 + (a^2 - b^2)b^2 + (a^2 - b^2)a^2;$$
$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$$
$$= (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Во всех рассматриваемых примерах используется принцип наглядного изображения их решений, который позволяет учащимся более глубоко понять суть задачи и суть метода решения. Реализация принципа вариативности поиска решений обуславливает актуализацию разнообразных знаний студентов из различных областей математики и включение их в поиск нестандартных решений предлагаемых известных задач. Так же метод аналогии тесно связан с индукцией (переход от первого явления ко второму, от простого к более сложному), что и отражено в сериях примеров. Все это в совокупности способствует активизации и развитию мышления, лучшему усвоению знаний и обнаружению связей между ними.

Библиографический список

1. Афанасьев В.В. Геометрические интерпретации процесса суммирования некоторых числовых рядов //Математика в школе. 1995. №6. С. 65-67.
2. Грес П.В. Математика для гуманитариев. М.: Юрайт, 2000.
3. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1975.
4. Уемов А.И. Логические основы метода моделирования: Монография. М.: Мысль, 1971.
5. Эрдниев Н.М. Аналогия в математике. М.: Знание, 1970.
6. HeadLiner Main Information. http://webcenter.ru/~prl/index/html