*В.В. Афанасьев, М.В. Пойкалайнен*

# ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ИГРЫ СО "СГОРАЮЩИМИ" ОЧКАМИ

… ведь игра соблазнительная вещь
Н.В.Гоголь. Игроки

...Игра старше культуры, ибо культура предполагает наличие человеческого общества, а животные вовсе не ждали появления человека, чтобы он научил их играть.

Психология и физиология давно занимаются наблюдением, описанием и объяснением игры животных, детей и взрослых. Каковы же биологические функции игры? Это выход избыточной жизненной силы; подчинение врожденному инстинкту подражания; потребность в отдыхе и разрядке; тренировка перед серьезным делом; упражнение в самообладании; стремление к главенству; компенсация вредных побуждений; восполнение монотонной деятельности; удовлетворение невыполнимых в реальной обстановке желаний.

Ни одно из приведенных объяснений не отвечает на вопрос "Но в чем же все-таки "соль" игры?". Почему младенец визжит от восторга? Почему игрок, увлекаясь, забывает все на свете? Почему публичное состязание повергает в неистовство тысячеголовую толпу? Интенсивность игры не объяснить никаким биологическим анализом. И все же как раз в этой интенсивности, в этой способности приводить в исступление кроется сущность игры, ее исконное качество. Логический рассудок говорит нам, что Природа могла бы дать своим детям все эти полезные биологические функции разрядки избыточной энергии в форме чисто механических упражнений и реакций. Но нет, она дала нам Игру, с ее напряжением, с ее радостью, с ее шуткой и забавой [2].

Именно поэтому игра занимает одно из ведущих мест в системе обучения, воспитания и развития. Предложение взять за основу задачи "игру" было сделано в статье [1], и представленная работа является продолжением этой публикации.

В данной статье рассматриваются вероятностные игры со "сгорающими" очками. Под вероятностными играми понимаем такие игры двух или более участников, которые допускают вероятностные оценки (вероятность победы участника, математические ожидания величины выигрыша и т.п.).

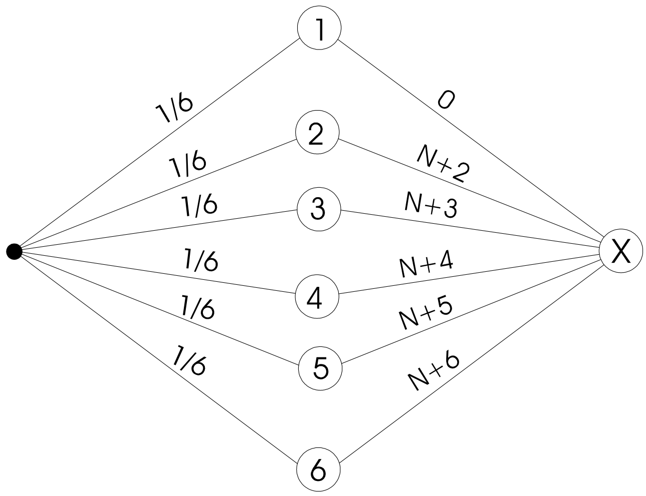
Игры со "сгорающими" очками – такие, в которых участники по очереди проводят какие-либо опыты сериями и могут добровольно передать ход другому игроку после определённого числа испытаний или набрав то или иное число очков в данной серии, или ход передается по принуждению, когда очки серии "сгорели" при определенном исходе испытания. Игра прекращается либо после проведения одинакового числа серий у участников, либо по истечении определенного времени.

**Задача 1**. Два игрока бросают игральную кость сериями по очереди, складывая количество выпавших очков, в любой момент игрок может остановиться и передать ход другому игроку, но если выпало 1 очко, то очки серии "сгорают" и ход автоматически передаётся противнику. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?
Возможны два подхода к выбору стратегии:
- по количеству набранных очков в серии;
- по числу подбрасываний в серии.

Решение 1 (по количеству набранных очков).

Пусть мы набрали N очков в данной серии.
Случайная величина X={число очков серии после следующего броска}

Построим граф распределения случайной величины X.




Найдём математическое ожидание как вес всего графа.

$M[X] = \frac{1}{6}(5N + 20)$

Продолжение станет невыгодным, если M[X]≤N

$\frac{1}{6}(5N + 20) \le N$

$N \ge 20$,при $N \ge 20$ продолжение игры становится для игрока невыгодным.

Следовательно, можно предложить игроку бросать игральную кость в серии до появления в сумме от 19 до 24 очков и передать ход другому игроку.

Решение 2 (по числу сделанных бросков).

Пусть n − число бросков.

Случайная величина $X_1$={число очков при одном бросании}

Случайная величина $X_1$ имеет следующий закон распределения.

| X1 | 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Найдём математическое ожидание случайной величины $X_1$.

$M[X_1]$=1/6*(2+3+4+5+6)=10/3, тогда

$M[n^* X_1]$=n*M[X1]=10*n /3. Заметим, что $M[n^* X_1]$ является случайной величиной. Вычислим математическое ожидание с.в. $M[n^* X_1]$

Составим закон распределения для с.в. $M[n^* X_1]$.

| M[n*X1] | 10/3*n | 0 |
|---|---|---|
| P | (5/6)n | 1-(5/6)n |

$M[M[n^* X_1]]$= (10*n /3) * (5/6)n, тогда

$M[M[(n+1)^* X_1]]$= (10*(n+1)/3) * (5/6)(n+1)

Продолжение серии бросков будет невыгодным, если

$M[M[(n+1)^* X_1]] \le M[M[n^* X_1]]$

(10*(n+1) /3)* (5/6)(n+1) ≤(10*n /3) * (5/6)n

(n+1)*5/6 ≤n

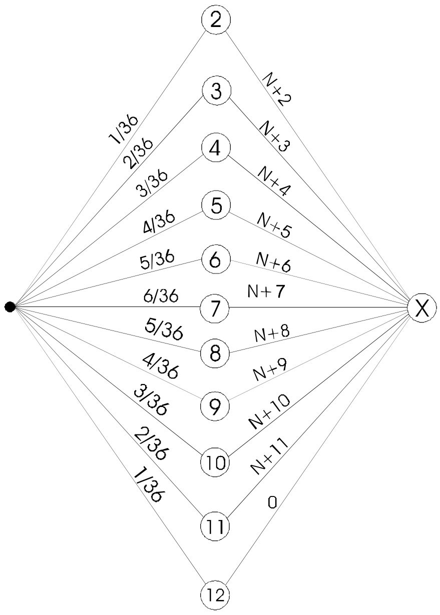
n≥5

Значит, следует делать не более 5 бросков в серии.

**Задача 2.**Два игрока бросают две игральные кости сериями по очереди, складывая количество выпавших очков, в любой момент игрок может остановиться и передать ход другому игроку, но при сумме выпавших чисел, равной 12, все набранные очки серии "сгорают" и ход передаётся другому игроку. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?

Решение 1 (по количеству набранных очков).

Пусть мы набрали N очков в данной серии.




Случайная величина X={число очков серии после следующего броска}

Построим граф распределения с.в. X и по нему найдём математическое ожидание M[X]:

$$M[X] = \tfrac{1}{36}(35N + 240)$$

Продолжение станет невыгодным, если $M[X] \le N$

$\tfrac{1}{36}(35N + 240) \le N$

$N \ge 240$.

Следовательно, можно предложить игроку бросать пару игральных костей в серии до появления в сумме 239 очков, а при получении 240 очков можно рискнуть и бросить ещё раз, а можно передать ход другому игроку.

Решение 2 (по числу сделанных бросков).

Пусть n − число бросков.

Случайная величина $X_1$ {число очков при одном бросании} имеет следующий закон распределения.

| $X_1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | $\tfrac{1}{36}$ | $\tfrac{2}{36}$ | $\tfrac{3}{36}$ | $\tfrac{4}{36}$ | $\tfrac{5}{36}$ | $\tfrac{6}{36}$ | $\tfrac{5}{36}$ | $\tfrac{4}{36}$ | $\tfrac{3}{36}$ | $\tfrac{2}{36}$ | $\tfrac{1}{36}$ |

Найдём математическое ожидание с.в. $X_1$

$M[X_1]= (2+6+12+20+30+42+40+36+30+22) *1/36=240/36=20/3$

$M[n* X_1]=n*M[X_1]= n *20/3$

$M[M[n* X_1]]=?$

Составим закон распределения для $M[n* X_1]$.

| $M[n* X_1]$ | n *20/3 | 0 |
|---|---|---|
| P | (35/36)n | 1-(35/36)n |

$M[M[n* X_1]]= n *20/3*(35/36)n$

$M[M[(n+1)* X_1]]= (n+1) *20/3 * (35/36)(n+1)$

Продолжение серии бросков будет невыгодным, если

$M[M[(n+1)* X_1]] \le M[M[n* X_1]]$

$(n+1) *20/3 * (35/36)(n+1) \le n *20/3*(35/36)n$

35/36*(n+1) ≤n

n≥35

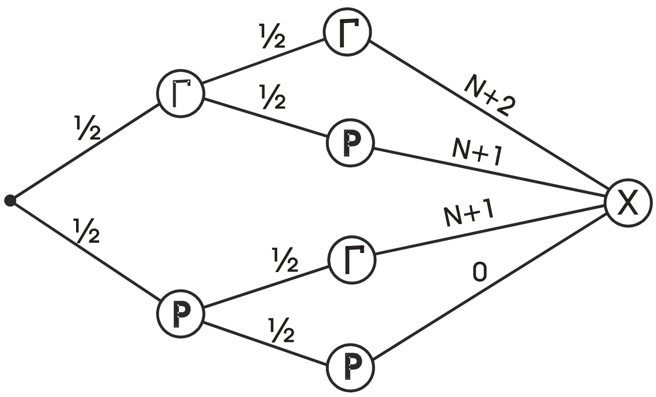
Значит, разумно делать не более 35 бросков.

**Задача 3.**Два игрока бросают две монеты сериями по очереди, складывая количество выпавших гербов, за каждый выпавший герб игрок получает одно очко, в любой момент игрок может остановиться и передать ход другому игроку, но если не выпало ни одного герба, то очки серии "сгорают" и ход передаётся другому игроку. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?

Решение 1(по числу набранных очков)

Пусть мы набрали N очков в данной серии, а случайная величина X={число очков серии после следующего броска}

Построим граф распределения и по нему найдём математическое ожидание случайной величины X.




M[X]=½N+½+¼N+½+0*¼= =¾N+1

Продолжение станет невыгодным, если

M[X] ≤ N

¾ N + 1 ≤ N, N ≥ 4,

при N ≥ 4 продолжение игры становится для игрока невыгодным.

Следовательно, можно предложить игроку бросать пару монет в серии до появления в сумме 3 или 4 очков и передать ход другому игроку.

Решение 2(по числу сделанных бросков).

Пусть n − число бросков.

Случайная величина X1={число очков при одном бросании}

Случайная величина X1 имеет следующий закон распределения.

| X1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | 1/4 | 2/4 | 1/4 |

Найдём математическое ожидание с.в. X1

$M[X_1]=1*2/4+2*1/4+0*1/4=1$

$M[n* X_1]=n*M[X_1]=n$. Заметим, что $M[n* X_1]$ является случайной величиной. Вычислим математическое ожидание с.в. $M[n* X_1]$

Составим закон распределения для $M[n* X_1]$, учитывая, что очки «не сгорят» (если ни разу не выпадет пара решек)

| $M[n* X_1]$ | n | 0 |
|---|---|---|
| P | (3/4)n | 1-(3/4)n |

$M[M[n* X_1]]= n * (3/4)n$

$M[M[(n+1)* X_1]]= (n+1) * (3/4)(n+1)$

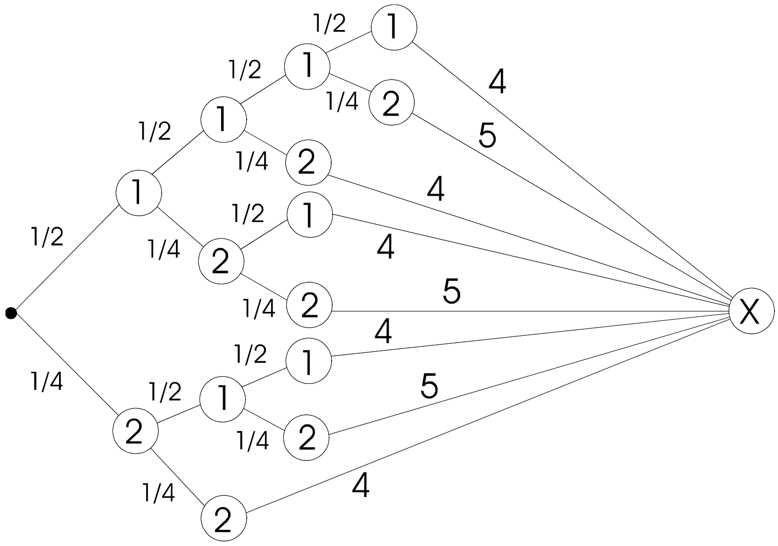
Продолжение серии бросков будет невыгодным, если

M[M[(n+1)* X1]]≤ M[M[n* X1]]
(n+1) * (3/4)(n+1) ≤n * (3/4)n
(n+1)*3/4 ≤n
n≥3
Значит, следует делать не более 3-х бросков.

Сравним эффективность предложенных двух подходов в определении стратегии по количеству набранных очков и по количеству подбрасываний в серии. Для этого найдём математические ожидания набранных очков в серии.

1. Прекратим испытания при появлении 3-х очков в серии.
   M[X]=(1+1+1)*1/2*1/2*1/2+(1+1+2)*1/2*1/2*1/2*1/4+(1+2)*1/2*1/4+(2+1)**1/4*1/2+ +(2+2)*1/4*1/4=9/8+4/8=13/8=1.625

2. Прекратим испытания при появлении по крайней мере 4-х очков в серии.
   Построим вероятностное дерево исходов:




M[X]=4*1/16+5*1/32+4*1/16+4*1/16+5*1/32+4*1/16+5*1/32+4*1/16==20/16+15/32 =55/32≈1.72

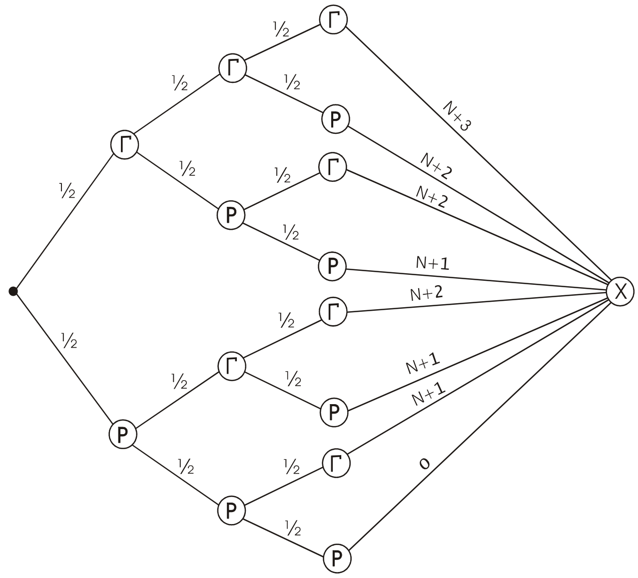
По числу бросков n=3
M[X]=3*(3/4)3=81/64≈1.26

1.72 >1.625>1.26, следовательно, более эффективна первая стратегия(по числу набранных очков в серии ).

**Задача 4.**Игроки бросают три монеты, за каждый выпавший герб они получают одно очко, в любой момент игрок может остановиться и передать ход другому игроку, но если не выпало ни одного герба, то очки серии "сгорают" и ход передаётся другому игроку. Какой стратегии выгоднее придерживаться?

Решение 1(по количеству набранных очков).

Пусть мы набрали N очков в данной серии.
Случайная величина X={число очков серии после следующего броска}
Построим граф распределения случайной величины X:




Математическое ожидание найдём как вес всего графа распределения.

$M[X]=\frac{1}{8}(3N+3+3N+6+N+3)==\frac{1}{8}(7N + 12)$

Продолжение станет невыгодным, если

$M[X] \leq N$

$\frac{1}{8}(7N + 12) \leq N$

$N \geq 12$, следовательно, можно предложить игроку бросать пару монет в серии до появления в сумме 11 очков, а можно получить 12, 13 или 14 очков и передать ход другому игроку.

Решение 2(по числу сделанных бросков).

Пусть мы произвели n бросков.

Случайная величина $X_1$ (число очков при одном бросании) имеет следующий закон распределения.

| $X_1$ | 1 | 2 | 3 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| P | 3/8 | 3/8 | 1/8 | 1/8 |

Найдём $M[X_1]$

$M[X_1]=1/8*(3+6+3)=3/2$

$M[n* X_1]=n*M[X_1]=3/2*n$

$M[M[n* X_1]]=?$

Составим закон распределения для M[n*X1].

| $M[n* X_1]$ | $3/2*n$ | 0 |
|---|---|---|
| P | $(7/8)n$ | $1-(7/8)n$ |

$M[M[n* X_1]]= 3/2*n * (7/8)n$

$M[M[(n+1)* X_1]]= 3/2*(n+1) * (7/8)(n+1)$

Продолжение серии бросков будет невыгодным, если

$M[M[(n+1)* X_1]] \leq M[M[n* X_1]]$

$3/2(n+1) * (7/8)(n+1) \leq 3/2*n * (7/8)n$

$7/8*(n+1) \leq n$

$n \geq 7$

Следовательно, можно рекомендовать игроку делать не более семи бросков в серии.

### *Задачи для самостоятельного решения*

1. Игроки бросают три монеты сериями по очереди, определяя количество выпавших гербов, за каждый выпавший герб игрок получает одно очко, а если выпало три герба, то игрок получает 6 очков; в любой момент он может остановиться и

передать ход другому игроку, но если не выпало ни одного герба, то очки серии "сгорают" и ход передаётся другому игроку. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?

2. Имеется колода, состоящая из 4 валетов, 4 дам и 4 королей. Два игрока выбирают из колоды вслепую по одной карте с возвратом её в колоду сериями по очереди, складывая количество набранных очков, за каждого валета-2 очка, даму-3, короля-4. В любой момент игрок может остановиться и передать ход другому, но если игрок достал даму пик, то очки серии "сгорают" и ход передаётся другому. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?
3. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Два игрока выбирают из колоды вслепую по одной карте с возвратом её в колоду сериями по очереди, складывая количество набранных очков: за каждого валета-2 очка, даму-3, короля-4, за остальные карты – 0. В любой момент игрок может остановиться и передать ход другому, но если он достал даму пик, то очки серии "сгорают" и ход передаётся другому. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?
4. Имеется колода, состоящая из 4 валетов, 4 дам, 4 королей и двух джокеров. Два игрока выбирают из колоды вслепую по одной карте с возвратом её в колоду сериями по очереди, складывая количество набранных очков; за каждого валета-2 очка, даму-3, короля-4. В любой момент игрок может остановиться и передать ход другому, но если игрок достал джокера, то очки серии "сгорают" и ход передаётся другому. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?
5. Игроки крутят рулетку сериями по очереди, складывая количество набранных очков, за каждое красное игрок получает одно очко, за каждое черное – 2, в любой момент он может остановиться и передать ход другому игроку, а если выпало "ZERO", то очки серии "сгорают" и ход передаётся другому. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?

Библиографический список

1. Афанасьев В.В., Новожилова И.В. Вероятностные игры // Ярославский педагогический вестник. 2000. №3. С.121-134.
2. Народное образование. 2000.№ 8.