В. Ф. Чаплыгин

КАК РЕШАТЬ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ

Заголовок статьи напоминает название известной книги Д. Пойа «Как решать задачу». Хотя эта книга написана около 60-ти лет тому назад, она не потеряла своей актуальности. Не утратила актуальности и сама проблема: учащиеся не умеют решать задачи, а что еще хуже, часть учителей не может объяснить им, как это делать. А задача учителя состоит не столько в том, чтобы решить задачу, сколько в том, чтобы объяснить учащимся, как найти решение. Настоящая статья написана под влиянием книги Д. Пойа, в ней конкретизированы его советы и добавлены некоторые соображения автора.

Отправным пунктом избраны конкретные задачи, которые вызывают трудности у учащихся, то есть автор идет от частного к общему, индуктивным путем.

Задача 1. Бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда. К нему подведены три трубы: одна – сверху, другая – снизу, а третья – к центру боковой грани. В трубу сверху вода вливается, а через две другие – выливается. Если открыть только нижнюю трубу, то полный бак опустеет за 8 ч. Если открыть и нижнюю, и боковую трубы, то полный бак опустошается за 7 ч. Если же в пустом баке открыть все три трубы, то он наполнится за 5 ч 24 мин. За какое время заполнится пустой бак, если открыть только верхнюю трубу?

Как помочь учащимся понять задачу? Необходимо вместе с ними проследить динамику наполнения бака и его опорожнения, обратив внимание на действие боковой трубы, которая функционирует лишь при наполнении верхней половины бака и ее опорожнения. Тогда становится понятным, что через нижнюю трубу вытекает за один час $\frac{1}{8}$ часть бака, нижняя половина бака вытечет за 4 ч, а верхняя за 3 ч, и, следовательно, за 1 ч через нижнюю и боковую трубы вытекает $\frac{1}{6}$ часть бака. После этого составляется уравнение

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{8}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{6}}=5\frac{2}{5} \Rightarrow \qquad \frac{4x}{8-x}+\frac{3x}{6-x}=\frac{27}{5},$$

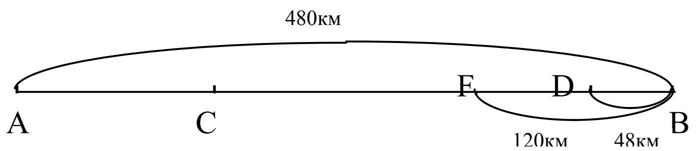
где через x обозначено время (в часах), за которое верхняя труба наполняет бак. После решения уравнения необходимо оценить полученные корни и отбросить корень $x=6\frac{30}{31}$, так как он больше 6 и при этом верхняя половина бака не наполнится (через верхнюю трубу поступало бы воды в час меньше $\frac{1}{6}$ части бака, а вытекала бы через нижнюю и боковую трубы $\frac{1}{6}$ часть).

Учитель должен показать учащимся аналогию между задачами на бассейны и на работу (см., например, задачи 37, 38, с.14 [7]).

Серьезные затруднения вызывают задачи на движение. Имеются в виду задачи на движение по прямой и по кругу, когда объекты движутся как в одном направлении, так и навстречу друг к другу, движение по реке или по эскалатору, которые абсолютно аналогичны. На наш взгляд, полезно ввести так называемую *скорость сближения*, которая при движении навстречу равна сумме скоростей, а при движении вдогонку – их разности. Очень важно обратить внимание учащихся на моменты начала движения объектов, их одновременность или различие. Приведем два примера.

Задача 2. Из пункта А в пункт В со скоростью 80 км/ч выехал автомобиль, а позже с постоянной скорость выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте В второй автомобиль поехал с той же скоростью назад и через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от В в момент прибытия в В первого автомобиля. Найти расстояние от А до места первой встречи автомобилей, если АВ=480 км.

В этой задаче, как, впрочем, и во многих других на движение, полезно сделать чертеж, на котором показаны данные задачи.



Необходимо обратить внимание учащихся на два обстоятельства: второй автомобиль выехал позже, чем первый, и их первая встреча (нахождение в одной точке АВ, на чертеже точка С) произошла в момент обгона вторым автомобилем первого.

Введем искомое расстояние АС=S (км) и скорость второго автомобиля x км/ч. Учитель должен помочь учащимся проанализировать условия задачи и увидеть, что за то время, за которое первый автомобиль проехал 48 км (от D до B), второй проехал 72 км (от D до F), так как в D произошла их встреча и движение от этого пункта началось одновременно. Эти рассуждения приводят к уравнению

$$\frac{48}{80}=\frac{72}{x}\Rightarrow x=120\,\text{км/ч}.$$

Второе уравнение можно получить, если рассмотреть движение автомобилей после их первой встречи в пункте С. С того момента, когда это произошло, второй автомобиль проехал расстояние от С до В, равное 480-S (км), за время $\frac{480-S}{x}$ (ч), простоял в В 20 мин, то есть $\frac{1}{3}$ ч (обязательно обращайте внимание на размерности физических величин!) и проехал от В до F 120 км за время $\frac{120}{x}$ ч. Первый автомобиль *за то же самое время* проехал от С до В за время $\frac{480-S}{80}$ ч. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{480-S}{80}=\frac{480-S}{x}+\frac{1}{3}+\frac{120}{x},$$

откуда, зная, что x=120 км/ч, находим S=160 км.

Задачи на движение по окружности имеют определенную специфику. Во-первых, учащимся трудно «размотать» окружность в отрезок прямой. Во-вторых, возникают проблемы с выбором скорости: какую выбрать, то ли угловую, то ли линейную, и какую взять размерность.

Задача 3. Три гонщика одновременно стартуют по кольцевому шоссе и движутся в одном направлении с постоянными скоростями. В момент старта второй гонщик находился впереди первого на треть круга, а третий – на таком же расстоянии впереди второго. Первый гонщик впервые после старта догнал второго в тот момент, когда тот закончил свой первый круг, а еще через 10 мин первый гонщик догнал третьего. Второй гонщик тратит на круг на две с половиной минуты меньше третьего. Сколько времени тратит на прохождение круга третий гонщик?

Предлагается ввести скорости гонщиков, выраженные в кругах в минуту: первого – x кр./мин, второго - y кр./мин, третьего - z кр./мин. К моменту, когда первый гонщик догнал впервые второго, он проехал $\frac{4}{3}$ круга за время $\frac{4}{3x}$ мин, а второй – один круг за $\frac{1}{y}$ мин и, следовательно, $\frac{4}{3x}=\frac{1}{y}$ [1]. Вызывает трудности составление второго уравнения. С одной стороны, первый гонщик прошел на $\frac{2}{3}$ круга больше третьего, догоняя его, и скорость их сближения равна x-z $\frac{\text{кр}}{\text{мин}}$. Следовательно, на это ушло $\frac{2}{3(x-z)}$ мин. С другой стороны, это произошло через 10 мин после обгона второго, то есть через $\frac{4}{3x}$+10 (мин). Отсюда имеем уравнение

$$\frac{2}{3(x-z)}=\frac{4}{3x}+10 \qquad [2]$$

Третье уравнение составляется без труда $\frac{1}{y}+\frac{5}{2}=\frac{1}{z}$ [3].

Считаем необходимым перед решением полученной системы уравнений поставить перед учащимися вопрос, какую величину необходимо найти - $\frac{1}{x}$. Поэтому выражаем из уравнения (1) переменную y, подставляем ее в уравнение [3] и выражаем переменную z, которую, в свою очередь, подставляем в уравнение [2]. В результате получаем

$$\frac{15x+8}{15x^2+2x}=\frac{15x+2}{x}.$$

Конечно, можно обойтись без всяких «хитростей», но замена t=15x+2 приводит к уравнению $t^2-t-6=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow 15x+2=3 \Rightarrow x=\frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{x}=15$ мин. (См. задачи 11, с.10, и 20, с.11 [7]).

Задача 4. Пункты А и В расположены на одной реке так, что плот, плывущий из А в В со скоростью течения реки, проходит путь от А до В за 24 ч. Весь путь от А до В и обратно катер проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость (скорость в стоячей воде) катера увеличилась на 40%, то тот же путь от А до В и обратно занял у катера не более 7 ч. Найдите время, за которое катер проходит путь от В до А, когда его собственная скорость не увеличена.

Напомнив учащимся, что при движении вниз по реке скорость течения реки складывается с собственной скоростью катера, а при движении вверх – из нее вычитается, обозначим собственную скорость катера x км/ч, а скорость течения реки (и, следовательно, плота) y км/ч. Тогда расстояние от А до В равно 24y (км), и в силу условия задачи приходим к двум неравенствам

$$\begin{cases} \dfrac{24y}{x+y}+\dfrac{24y}{x-y}\ge 10, \\ \dfrac{24y}{\frac{7}{5}x+y}+\dfrac{24y}{\frac{7}{5}x-y}\le 7 \end{cases}$$

Полученная система ставит учащихся в тупик, так как им непонятно, что же делать с системой двух неравенств, содержащих две переменные, и на что можно рассчитывать. Однако после введения новой переменной $z=\frac{x}{y}$ и несложных тывать. Однако после введения новой переменной $z=\frac{x}{y}$ и несложных преобразований получаем два квадратных неравенства

$$\begin{cases} 5z^2-24z-5\le 0, \\ 49z^2-240z-25\ge 0' \end{cases}$$

где $z>0$. Полученная система имеет своим решением $z=5 \Rightarrow x=5y$, и, следовательно, время, которое мы ищем, равно $\frac{24y}{y-x}=\frac{24y}{4y}=6$ (ч).

Рассмотрим задачу, решение которой приводит к смешанной системе, содержащей уравнение и неравенство.

Задача 5. Группа студентов решила купить магнитофон стоимостью от 170 до 195 рублей. В последний момент двое отказались участвовать в покупке и поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 рубль больше. Сколько стоил магнитофон?

Эта задача содержит «завуалированное» условие, а именно число студентов в группе заведомо является целым числом, обозначим их число через x, а через y рублей – величину первоначально предполагаемого взноса. Тогда стоимость магнитофона равна xy, и в силу условия задачи имеем систему

$$\begin{cases} xy=(x-2)(y+1), \\ 170\le xy\le 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=2, \\ 170\le xy\le 195 \end{cases} \Rightarrow 340\le x(x-2)\le 390\,.$$

Теперь полученную систему неравенств решаем с учетом того, что x является натуральным числом. Из неравенства $x^2-2x-340\ge 0$ имеем $x\ge 1+\sqrt{341}$. Из неравенства $x^2-2x-390\le 0$ находим $x\le 1+\sqrt{391}$. Таким образом, мы получили, что $19<1+\sqrt{341}\le x\le 1+\sqrt{391}<21$. Следовательно, $x=20$, а тогда $y=9$ и стоимость магнитофона равна $xy=180$ рублей. (См. также задачи 9-14, с.19 [7]).

Выше уже отмечалась аналогия между задачами с эскалатором и движением по реке. Учитель должен объяснить это.

Задача 6. Два человека начали одновременно спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое медленнее другого. Один из них, спустившись вниз, насчитал 40 ступенек, а второй – 60. Сколько ступенек пришлось бы им отсчитать по неподвижному эскалатору?

Мы предлагаем ввести в этой задаче следующие переменные: длина неподвижного эскалатора a ступеней, скорость одного пассажира (относительно эскалатора) x ст/мин, скорость эскалатора y ст/мин. Тогда скорость другого пассажира $2x$ ст/мин. Первый пассажир спустится вниз за $\frac{a}{x+y}$ мин, а второй – за $\frac{a}{2x+y}$ мин, и они, соответственно, насчитают $\frac{ax}{x+y}$ и $\frac{2ax}{2x+y}$ ступеней. Учащиеся не сразу могут сориентироваться, какая из полученных величин равна 40, а какая – 60. Некоторые из них действуют наугад, вместо того, чтобы составить отношение $\left(\frac{ax}{x+y}:\frac{2ax}{2x+y}=\frac{2x+y}{2x+2y}<1\right)$.

Таким образом приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{ax}{x+y}=40, \\ \dfrac{2ax}{2x+y}=60 \end{cases}$$

Учащихся может смутить то обстоятельство, что они получили два уравнения с тремя переменными. Однако, разделив первое уравнение на второе, получим

$\frac{2x+y}{2(x+y)}=\frac{2}{3}$, откуда $y=2x$. После этого из первого уравнения легко находится a=120 ступеней.

Учителю имеет смысл подчеркнуть, что сами по себе переменные x и y нас не интересовали, а было достаточно знать их отношение. (См. задачи 43, 44, с.15 [7]).

Существенные трудности вызывают у учащихся задачи на растворы и сплавы.

Задача 7. Из сосуда, в котором находится чистый глицерин, отлили 1л его и долили 1л воды. Затем отлили 1л смеси и вновь долили 1л воды. То же самое проделали в третий раз, после чего воды в сосуде стало в 7 раз больше, чем глицерина. Какое количество воды и глицерина оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

Проследим за содержанием глицерина в сосуде. Если его первоначальное количество принять за x л, то после первого отливания его стало (x-1) л. Долив 1л воды, получили x л смеси, 1л которой содержит $\frac{x-1}{x}$ л глицерина. После отливания 1л смеси в сосуде осталось $x-1-\frac{x-1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$ л глицерина, а в 1л смеси, полученной после доливания 1л воды, будет $\frac{(x-1)^2}{x^2}$ л глицерина. После третьего отливания объем глицерина в сосуде выразится формулой

$$\frac{(x-1)^2}{x}-\frac{(x-1)^2}{x^2}=\frac{(x-1)^3}{x^2},$$

что по условию задачи равно $\frac{1}{8}x$ л. Следовательно,

$$\frac{(x-1)^3}{x^2}=\frac{1}{8}x \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right)^3=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{x-1}{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2$$

Разделив 2 л в отношении 7:1, находим, что воды в сосуде осталось $\frac{7}{4}$ л, а глицерина $\frac{1}{4}$ л.

Задача 8. Имеются три сплава. Первый содержит 45% олова и 55% свинца, второй – 10% висмута, 40% олова и 50% свинца, третий – 30% висмута и 70% свинца. Из них необходимо составить новый сплав, содержащий 15% висмута. Какое наибольшее и наименьшее процентное содержание свинца может быть в новом сплаве?

Данные задачи удобно свести в таблицу, которая придаст задаче наглядность:

	Sn	Pb	Vi	m
1 сплав	45%	55%	—	x кг
2 сплав	40%	50%	10%	y кг
3 сплав	—	70%	30%	z кг
4 сплав			15 %	x+y+z кг

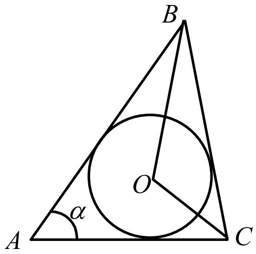
Необходимо обратить внимание учащихся на то обстоятельство, что без использования третьего сплава в новом сплаве не могло бы оказаться 15% висмута, и, следовательно, z>0. Нетрудно определить максимальное процентное содержание свинца в новом сплаве, которое получится, если взять для получения нового сплава только первый и третий сплав в равных количествах, то есть x=z. Из условия задачи получаем $0{,}15(x+y+z)=0{,}1y+0{,}3z \Rightarrow y=z-3x$. Процентное содержание свинца в новом сплаве выражается отношением

$$p=\frac{100(0,55x+0,5y+0,7z)}{x+y+z}=5\frac{11x+10y+14z}{x+y+z}=5\frac{44z-19x}{4z-2x}=\frac{5}{2}\frac{44-19\frac{x}{z}}{2-\frac{x}{z}}.$$

Обратите внимание на то, как функцию трех переменных *x, y, z* с учетом того, что $y=3z-3x$, удалось свести к функции одной переменной $t=\frac{x}{z}$. Так как в силу условия задачи $0\le t\le 1$ (это надо объяснить учащимся, так как в случае, когда $x>z$, процент висмута в новом сплаве окажется меньше 15). Функция $\varphi(t)=\frac{44-19t}{2-t}$, рассматриваемая на промежутке $t\in[0;1]$, достигает минимума при $t=0$ и максимума при $t=1$. Это приводит к следующим результатам: $p_{\min}=55\%$ и $p_{\max}=62,5\%$.

Остановимся далее на нескольких геометрических задачах. В них основную трудность представляют логические рассуждения, анализ задачи, который может осуществляться как в направлении от данных величин и отношений к искомым(его можно назвать нисходящим), так и в обратном направлении (этот анализ можно назвать восходящим), а иногда приходится проводить встречный анализ, двигаясь одновременно в двух указанных направлениях.

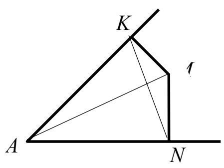
Задача 9. В треугольнике *ABC* $\angle BAC=\alpha$, *BC*=*a*. Найти радиус окружности, описанной около треугольника *BOC*, где *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*.



Несмотря на простоту задачи, она зачастую ставит учащихся в тупик. А ведь если пойти от вопроса задачи и спросить себя, как найти радиус окружности, описанной около треугольника *BOC*, если длина стороны *BC* известна, то становится понятным, что достаточно найти $\angle BOC$, так как $R=\frac{a}{2\sin\angle BOC}$. Далее вместе с учащимися необходимо вспомнить, где находится центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Ответ известен: в точке пересечения биссектрис. Но тогда понятно, что $\angle BOC=\pi-\frac{\angle B+\angle C}{2}$ и, следовательно,

$$R=\frac{BC}{2\sin\angle BOC}=\frac{a}{2\sin\frac{\angle B+\angle C}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 10. Внутри острого угла, равного α, взята точка *M*, удаленная от его сторон на расстояния *k* и *n*. Найти расстояние от вершины угла до точки *M*.

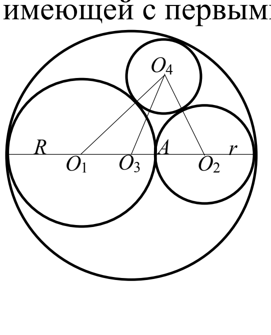


Эта задача имеет несколько решений, но нам представляется наиболее удачным и, может быть, даже изящным – следующее. Обратим внимание учащихся на возможность описать окружность около четырехугольника *AKMN*, диаметр которой – отрезок *AM*. Эта окружность одновременно описана около треугольника *AKN*, и, следовательно, $AM=\frac{KN}{\sin\alpha}$. *KN*, в свою очередь, можно найти по теореме косинусов из треугольника *KMN* $KN=\sqrt{k^2+n^2+2kn\cos\alpha}$. И, таким образом,

$AM=\frac{\sqrt{k^2+n\ \ +2kn\cos\alpha}}{\sin\alpha}$. Трудность поиска этого решения состоит в неожиданном выходе на окружность, о которой в задаче даже речи не идет. Однако навести учащихся на эту мысль можно, проанализировав задачу, и обратить их внимание на прямоугольные треугольники *ANM* и *AKM*, для которых *AM* является обшей гипотенузой и тем самым диаметром указанной окружности.

Но не надо думать, что в любой задаче поиск решения обеспечивает только анализ. Нельзя преуменьшать возможность догадки, интуиции, эвристики. Собственно, в этом элементе творчества прежде всего и состоит ценность решения задач, содержащих элементы открытия. Иначе дело сводилось бы к рутинной работе, что не способствовало бы развитию любознательности учащихся, творческих способностей, пробуждению их интереса к математике, что, безусловно, очень важно при ее изучении.

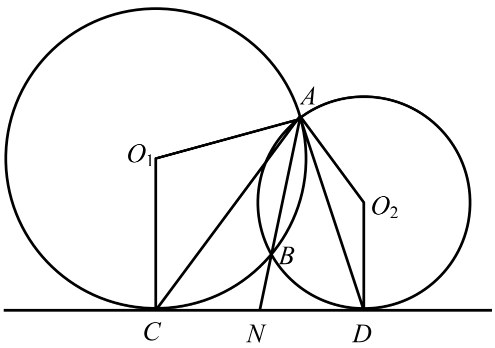
Задача 11. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) имеют внешнее касание. Найти радиус окружности, касающейся первых двух окружностей и третьей окружности, имеющей с первыми двумя общий диаметр и касающейся их.



Радиус третьей окружности с центром в точке O_3 равен $R + r$, радиус четвертой окружности с центром в точке O_4 обозначим через ρ. Если положить $\angle O_4O_3O_2 = \varphi$, то по теореме косинусов из треугольника $O_4O_3O_2$ выражается $O_4O_2^{\,2}$, а из треугольника $O_4O_3O_1$ можно выразить $O_1O_4^{\,2}$. Из двух полученных соотношений можно получить для $\cos\varphi$ два выражения, приравняв которые, найдем $\rho = \dfrac{Rr(R+r)}{Rr + R^2 + r^2}$.

В решении этой задачи представляется несколько «неожиданным» использование теоремы косинусов, что вполне оправдано краткостью решения, выйти на которое можно после внимательного изучения чертежа и некоторых размышлений.

Задача 12. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются некоторой прямой в точках C и D, N – точка пересечения прямых AB и CD (B лежит между A и N). Найти: 1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD; 2) отношение высот треугольников NAC и NAD, проведенных из вершины N.



1) Пусть $O_1C = R$, $O_2D = r$, $\angle AO_1C = 2\alpha$, $\angle AO_2D = 2\beta$, а ρ - искомый радиус. По теореме синусов имеем: $AC = 2R\sin\alpha$, $AD = 2r\sin\beta$, $AC = 2\rho\sin\beta$ и $AD = 2\rho\sin\alpha$. Отсюда получаем

$$AC \cdot AD = 4Rr\sin\alpha\sin\beta = 4\rho^2\sin\alpha\sin\beta.$$

Следовательно, $Rr = \rho^2$ и $\rho = \sqrt{Rr}$.

2) Так как $ND^2 = AN \cdot NB = CN^2$, то $CN = ND$. Если обозначить через h_1 и h_2 соответственно высоты треугольников *ANC* и *AND*, то $h_1 = CN \cdot \sin\alpha$, $h_2 = ND \cdot \sin\beta$ и, следовательно, отношение $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Из соотношений, полученных выше, имеем $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{R\sin\alpha}{r\sin\beta} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Поэтому $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$. Таким образом, $\dfrac{h_1}{h_2} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

В этой задаче очень эффектно выглядит теорема синусов и теорема о квадрате касательной. Одновременно демонстрируется удобство алгебраического метода. Для ее решения учащиеся должны хорошо знать измерение углов, связанных с окружностью.

Используя рассмотренные задачи как индуктивную базу, выделим те моменты, которые являются общими почти для всех задач. Сделанные выводы не намного отличаются от написанного Д. Пойя. Первое условие, а, может быть, даже требование состоит в том, чтобы правильно понять задачу, осознать ее. Нередки случаи, когда учащийся, неправильно истолковав условия задачи, решает другую задачу (иногда повод к этому дает нечетко сформулированное условие задачи, допускающее неоднозначную трактовку). Учащийся должен четко понять, что дано в задаче, какие связи и отношения существуют между данными задачи, что требуется найти. Чтобы лучше это понять, можно привлечь диаграммы, чертежи, таблицы и т. д. Это наглядно видно, например, из задач 2, 3, 8 и, конечно, из геометрических задач 9, 10, 11, 12.Если в задаче участвуют понятия и определения, которые учащиеся могли забыть или неправильно понимать, то их надо обязательно объяснить. К ним относятся, например, концентрация раствора (как правило, в %), производительность труда, скорость, мощность и т. д. Часто проблемы возникают при выборе размерности. Кстати сказать, соображения размерности могут помочь найти ошибку в решении геометрических задач. Даже не самые слабые учащиеся неправильно указывают, как связаны расстояние, время и скорость при равномерном движении, не говоря уже о равноускоренном. Если речь идет о росте вклада, помещенного в банк, то необходимо не только напомнить, что такое процент, но и вывести формулу для так называемых сложных процентов, проиллюстрировав на простейших конкретных примерах.

Следующим этапом в решении алгебраических задач является выбор переменных (неизвестных) величин и установления связей между ними. Нам уже приходилось высказывать точку зрения, состоящую в том, что вовсе не обязательно сводить число переменных к минимуму. На этом этапе решения задачи учащиеся вместе с учителем глубже проникают в ее суть, еще раз осознают ее условие, формулируют вопрос задачи в терминах введенных переменных, что является фактически элементом анализа. На этом этапе учащиеся зачастую совершают при установлении связей между переменными совершенно неожиданные и трудно объяснимые ошибки следующего типа: a вдвое больше $b \Rightarrow b = 2a$, c на 2 больше $d \Rightarrow c + 2 = d$ и т. п. Задача преподавателей в данном случае состоит в том, чтобы призвать их быть очень внимательными в этих моментах. Как уже отмечалось, совершенно необходимо проводить аналогии в близких задачах, как, например, в задачах, связанных с движением по реке и эскалатору. Только это делать надо не в директивном порядке: делай так же, как в той задаче, а пояснить, убедить, помочь увидеть эту аналогию, это создает возможность разбить множество всех задач на классы по методам их решения.

Следующий этап состоит в том, чтобы составить уравнения и неравенства, выражающие отношения между введенными переменными, иначе говоря, составление математической модели задачи. Теперь уже на первый план выходят технические трудности – решение полученных уравнений и систем. Выше были показаны некоторые приемы их решения (задачи 4, 5, 6, 7, 8).

Когда техническая часть решения задачи преодолена, необходимо проанализировать полученный результат. Нередко получается не одно, а два решения уравнения или системы. Так было, например, в задаче 1, где возникла необходимость оценки полученных решений. Такая же ситуация возникает в задаче 19 [7.С.5], когда полученное уравнение $x^2 - 30x + 200 = 0$, где x – количество литров спирта, налитого в первый сосуд, имеет два корня $x_1 = 10$, $x_2 = 20$. На этом многие учащиеся и останавливаются. Однако, проведя анализ задачи, легко убедиться, что x=10 не удовлетворяет ее условию. В геометрических задачах на вычисление при проведении анализа можно поставить задачу на построение той или иной фигуры, что помогает в нахождении идеи решения. Если не провести анализ полученного решения, его реальной оценки, то дело может дойти до курьеза. Автору как-то пришлось проверять экзаменационную работу абитуриента, в которой решалась задача о почтальоне, который шел в гору, по ровной местности, под гору. И вот в ответ, какова скорость почтальона, абитуриент пишет 340 м/с!, и его нисколько не насторожило, что скорость почтальона оказалась равной скорости реактивного самолета. Здравый смысл должен сопутствовать учащемуся всегда. Он может подсказать идею решения, контролировать все последующие действия, реально оценить полученный результат. Очень важно отыскивать различные решения задачи, из которых можно выбрать самый рациональный, и, кроме того, какой-то из этих вариантов может оказаться полезным при решении аналогичной задачи.

Если все сказанное резюмировать, то мы придем фактически к «таблице» Д. Пойя, может, несколько модифицированной.

Во-первых, требуется понять задачу, разобраться в ней, истолковать смысл участвующих в ней данных (как говорил Паскаль, заменить термины их определениями), установить связи между участвующими в задаче данными.

Во-вторых, ввести неизвестные величины и выразить отношения между ними. Это может быть сделано в виде таблиц, диаграмм, чертежей, уравнений, неравенств и т. п. При этом лучше расщеплять задачу на отдельные ее элементы. Далее необходимо поставить вопрос задачи в терминах введенных переменных. Очень часто учащиеся, составив какие-то уравнения или неравенства, начинают их решать, не понимая, ради чего они это делают, а спустя некоторое время спрашивают «А что мы ищем?» и «Что нужно найти?». Этот этап можно назвать математизацией задачи или составлением ее математической модели. Он требует немалых логических усилий.

В-третьих, требуется решить составленные уравнения и неравенства или их системы. Этот этап носит более технический или алгоритмический характер.

В-четвертых, требуется поэтапно проверить решение задачи (именно задачи, а не системы или уравнения), оценить его с точки зрения здравого смысла. Этот этап, как и второй, требует серьезных логических усилий, логического анализа.

Библиографический список

1. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: ИЛ, 1954, 535с.
2. Пойя Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961. 207с.
3. Смирнов Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1997. 323с.
4. Чаплыгин В. Ф. О некоторых трудностях, возникающих при решении геометрических задач// Ярославский пед. вестник. 2000. №1. 150-153с.
5. Чаплыгин В. Ф. Некоторые методические соображения по решению текстовых задач// Математика в школе. 2000. №4. 28-32с.
6. Чаплыгин В. Ф. Подборка задач «на окружность»// Математика в школе. 2000. №7. 37с. 43-44с.
7. Чаплыгин В. Ф., Чаплыгина Н. Б. Задачи вступительных экзаменов по алгебре и геометрии. Ярославль, 2003. 112с.
8. Сборник задач по математике для поступающих в вузы/ Под ред. А. И. Прилепко. М.: Высшая школа, 1989. 274с.